Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2026
20. April 2026

Lineare Algebra 1 Übungsblatt 2

Aufgabe 6: Vektorraumaxiome (28 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie unter Verwendung der Vektorraumaxiome:

a) $0 \cdot v = 0$

b) $\lambda \cdot 0 = 0$

c) $(-1) \cdot v = -v$

d) $\lambda \cdot v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ oder $v = 0$

Aufgabe 7: Funktionenraum (18 Punkte)

Sei M eine Menge und $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{K}^M$ aller Abbildungen $M \to \mathbb{K}$ einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ bildet, wenn man Addition und Skalarmultiplikation punktweise definiert, d.h. für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f, g \in \mathbb{K}^M$ definieren wir

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x), \quad \forall\, x \in M.$$

Aufgabe 8: Funktionenräume? (30 Punkte)

Die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein reeller Vektorraum. Bestimmen Sie mit Beweis, welche der folgenden Mengen Unterräume des $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind:

a) die Menge aller ungeraden Funktionen, d.h. $f(-x) = -f(x)$,

b) die trigonometrischen Polynome, dies sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich in der Form

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx))$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ darstellen lassen,

c) die Menge der Funktionen mit $f(0) = 1$,

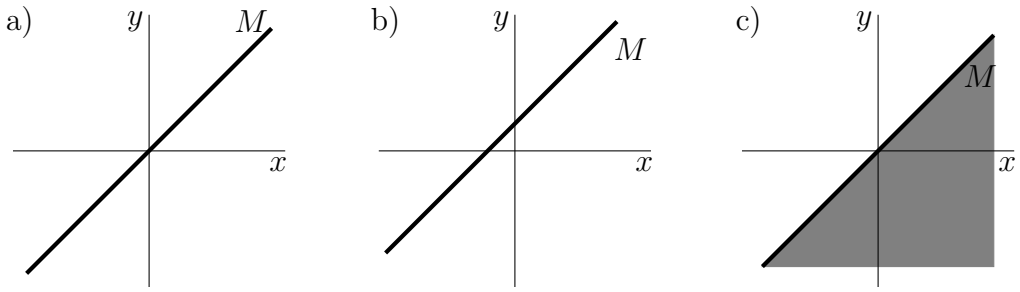
d) die Menge der Funktionen, so dass $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \geq 0$,

e) die Menge der Funktionen, für die $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x+y) = f(x)f(y)$,

f) die Menge der linearen Funktionen, d.h. $\forall \alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Aufgabe 9: Visuelle Repräsentation von Vektorräumen (24 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden visuellen Darstellungen von Mengen $M \subset \mathbb{R}^2$ Unterräume des $\mathbb{R}^2$ sind. Begründen Sie Ihre Antworten.



Abgabe: Laden Sie bitte Ihre Lösung bis 16:00 Uhr am Mittwoch den 29.4.2026 auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` hoch.