Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2026
27. April 2026

Lineare Algebra 1 Übungsblatt 3

Aufgabe 10: Endliche Vektorräume (20 Punkte)

Konstruieren Sie einen Vektorraum V mit 42 Elementen über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, oder zeigen Sie, dass dies unmöglich ist.

Aufgabe 11: Durchschnitte von Unterräumen (30 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt beliebig vieler (auch unendlich vieler) Unterräume eines Vektorraums V wieder ein Unterraum ist.
b) Wann ist die Vereinigung zweier Unterräume wiederum ein Unterraum? (Mit Beweis.)

Aufgabe 12: Linear unabhängige Funktionen (20 Punkte)

Gegeben seien die drei Funktionen $f, g, h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = 3\ln(x), \quad h(x) = 4\ln(x\mathrm{e}^x).$$

Sind diese als Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^{(0,1)}$ der Abbildungen von $(0, 1)$ nach $\mathbb{R}$ linear unabhängig?

Aufgabe 13: Basen (30 Punkte)

(a) Gegeben sei der Unterraum $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3\} \subset \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis von U, d.h. geben Sie eine Menge B von Vektoren an und zeigen Sie, dass B eine Basis von U ist.

(b) Es sei $P^{(4)}_{\mathbb{R}}$ der Vektorraum der Polynome vom Grade höchstens 4. Es seien $q_i \in P^{(4)}_{\mathbb{R}}$ gegeben durch $q_1(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $q_2(x) = x^3$ und $q_3(x) = x - 1$. Ergänzen Sie $\{q_1, q_2, q_3\}$ zu einer Basis von $P^{(4)}_{\mathbb{R}}$, d.h. finden Sie $q_4, q_5 \in P^{(4)}_{\mathbb{R}}$, so dass $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ eine Basis von $P^{(4)}_{\mathbb{R}}$ bildet (mit Beweis, dass es sich um eine Basis handelt).

Abgabe: Bitte laden Sie Ihre Lösung bis 16:00 Uhr am Mittwoch den 6.5.2026 auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` hoch.

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Menge = set, Teilmenge = subset, Schnittmenge = intersection, Vereinigungsmenge = union, Funktion = function, eindeutig = unique [juniek], natürliche Zahl = natural number oder positive integer [intedscher], ganze Zahl = integer, reelle Zahl = real number, komplexe Zahl = complex number, imaginäre Zahl = imaginary number, Zahlkörper = (number) field, abelsche Gruppe = Abelian group, reellwertig = real-valued, Äquivalenzrelation = equivalence relation, Restklasse = residue class, Vektor = vector, Matrix (Plural Matrizen) = matrix [mäjtrix] (plural matrices [mäjtrißies]), Polarkoordinaten = polar coordinates [kou-ordinätts], Polynom = polynomial.