Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2026
4. Mai 2026

Lineare Algebra 1: Übungsblatt 4

Aufgabe 14: Komposition linearer Abbildungen (10 Punkte)

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ und $T : U \to V$ sowie $S : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $S \circ T : U \to W$ linear ist.

Aufgabe 15: Lineare Abbildungen auf $P_{\mathbb{R}}$ (10 Punkte)

Sei $P_{\mathbb{R}}^{(r)}$ wieder der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq r$. Gibt es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to P_{\mathbb{R}}^{(2)}$, die gleichzeitig die folgenden 3 Bedingungen erfüllt:
$L(1,2,3) = x^2 - 1, \quad L(0,2,1) = 3x + 4, \quad L(-1,0,-2) = x^2 + x + 1$?

Aufgabe 16: Direkte Summe von Vektorräumen (20 Punkte)

Seien zwei Vektorräume V und W über $\mathbb{K}$ gegeben, mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Das cartesische Produkt $V \times W$ wird durch die Verknüpfungen

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)\,, \quad \lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

ebenfalls zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, der die direkte Summe $V \oplus W$ heißt.
Zeigen Sie, dass $\dim(V \oplus W) = n + m$ gilt.

Aufgabe 17: Bild und Kern (30 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen jeweils $\mathrm{Kern}(L_j)$, $\mathrm{Bild}(L_j)$, $\dim(\mathrm{Kern}(L_j))$ und $\dim(\mathrm{Bild}(L_j))$. (Eine Fallunterscheidung kann nötig sein.)

a) $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto a \times x$, d.h. das Kreuzprodukt mit einem festen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$.
   Zur Erinnerung: $(a_1, a_2, a_3) \times (x_1, x_2, x_3) := (a_2 x_3 - a_3 x_2, a_3 x_1 - a_1 x_3, a_1 x_2 - a_2 x_1)$.

b) $L_2 : P_{\mathbb{R}}^{(3)} \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \int_{-1}^{1} p(x)\, dx$.

c) $L_3 : V \oplus V \to V$, $(v, w) \mapsto v - w$, wobei $\dim(V) = n$ sei.

Aufgabe 18: Projektionen (30 Punkte)

Sei V ein Vektorraum und $P : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) P ist idempotent, d.h. $P \circ P = P$.

(ii) Die Einschränkung von P auf $U := \mathrm{Bild}(P)$ ist die Identität, d.h. $P|_U = \mathrm{id}_U$.

(iii) Es existieren Unterräume $U, W \subset V$, so dass $U + W = V$ und $P(u + w) = u$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

Ist eine dieser Eigenschaften (und damit alle) erfüllt, so heißt P eine Projektion.
Tipp: Beweisen Sie z.B. die Implikationen (i)$\Rightarrow$(ii), (ii)$\Rightarrow$(iii) und (iii)$\Rightarrow$(i).

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch 13.5.2026 auf `urm.math.uni-tuebingen.de`.

Vokabeln: Repräsentant = representative, paarweise disjunkt = pairwise disjoint, cartesisches Produkt = Cartesian product, Paar = pair oder couple, Tripel = triple, n-Tupel = n-tuple, Vektorraum = vector space, Assoziativgesetz = associative law, Kommutativgesetz = commutative law, Distributivgesetz = distributive law, Skalar = scalar [skäjlar], Unterraum = subspace, Linearkombination = linear combination, Aufspann oder Spann oder lineare Hülle = span oder linear hull, Erzeugendensystem = generating system oder spanning system, Koeffizient = coefficient [kou-effischent], linear unabhängig = linearly independent, Basis (Plural Basen) = basis [bäj-ßis] (plural bases [bäj-ßies]), Abbildung = mapping, Definitionsbereich (einer Funktion) = domain of definition oder domain.