

LINEARE ALGEBRA 1: ÜBUNGSBLATT 5

Aufgabe 19: Symmetrische Matrizen (45 Punkte)

Für $M = (M_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ sei die *transponierte* Matrix $M^T \in M(n \times m, \mathbb{K})$ definiert durch

$$(M^T)_{ij} = M_{ji}$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$. Weiter sei $\mathcal{S}(n, \mathbb{K}) := \{S \in M(n, \mathbb{K}) : S^T = S\}$ die Menge der *symmetrischen* $n \times n$ -Matrizen, und sei $\mathcal{A}(n, \mathbb{K}) := \{A \in M(n, \mathbb{K}) : A^T = -A\}$ die Menge aller *antisymmetrischen* $n \times n$ -Matrizen.

- Zeigen Sie, dass die Transposition $M \mapsto M^T$ eine lineare Abbildung $M(m \times n, \mathbb{K}) \rightarrow M(n \times m, \mathbb{K})$ definiert.
- Zeigen Sie, dass $(XY)^T = Y^T X^T$ für alle $X \in M(\ell \times m, \mathbb{K})$ und $Y \in M(m \times n, \mathbb{K})$.
- Im folgenden habe \mathbb{K} die Eigenschaft, dass $1 + 1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass für jede Matrix $M \in M(n, \mathbb{K})$ genau ein Paar (S, A) aus einer symmetrischen Matrix $S \in \mathcal{S}(n, \mathbb{K})$ und einer antisymmetrischen Matrix $A \in \mathcal{A}(n, \mathbb{K})$ existiert, so dass gilt

$$M = S + A.$$

- Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}(n, \mathbb{K})$ und $\mathcal{A}(n, \mathbb{K})$ Unterräume von $M(n, \mathbb{K})$ sind und bestimmen Sie (mit Beweis) ihre jeweiligen Dimensionen.
- Erklären Sie anhand der Dimensionsformel für Unterräume, warum sich dabei $\dim \mathcal{S}(n, \mathbb{K}) + \dim \mathcal{A}(n, \mathbb{K}) = n^2$ ergibt.

Aufgabe 20: Die Lie-Algebra der $n \times n$ -Matrizen (15 Punkte)

Eine *Lie-Algebra* (benannt nach dem norwegischen Mathematiker Sophus Lie, 1842–1899) ist ein \mathbb{K} -Vektorraum V zusammen mit einer Verknüpfung $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ (genannt Lie-Klammer) derart, dass für alle $A, B, C \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

- $[\cdot, \cdot]$ ist bilinear, d.h. $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$ und $[A, \alpha B + \beta C] = \alpha[A, B] + \beta[A, C]$,
- $[A, A] = 0$, und
- es gilt die Jacobi-Identität $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.

Zeigen Sie, dass der Vektorraum $V = M(n, \mathbb{K})$ der $n \times n$ -Matrizen durch die Verknüpfung $[A, B] := AB - BA$ (genannt Kommutator = lat. "Tauscher") zu einer Lie-Algebra wird.

Bitte wenden!

Aufgabe 21: Basiswechsel (16 Punkte)

- (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Wir betrachten die lineare Abbildung $P_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die $v = \alpha a + \beta b$ auf

$$P_{a,b}v = \alpha a$$

abbildet. Was ist die geometrische Bedeutung dieser Abbildung? Bestimmen Sie die Matrix $M_{\mathcal{A}}(P_{a,b})$ zu $P_{a,b}$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (a, b)$ und die Matrix $M_{\mathcal{K}}(P_{a,b})$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$.

- (b) Es seien die Basen $\mathcal{A} = ((1 + i, 1 - i), (1 + 2i, -1)) = (a_1, a_2)$ und $\mathcal{B} = ((2 + 2i, 2 - 2i), (1 + i, -2)) = (b_1, b_2)$ des Vektorraums \mathbb{C}^2 gegeben. Dabei sind $(1 + i, 1 - i)$ etc. die Darstellungen der Basisvektoren bezüglich der kanonischen Basis. Berechnen Sie die zugehörige Transformationsmatrix $S = (s_{ij})$ mit $b_j = \sum_i s_{ij}a_i$.

Aufgabe 22: Der Rang bei Komposition (24 Punkte)

Der Rang einer Matrix C ist definiert als $\dim \text{Bild}(C)$. Seien $A \in M(\ell \times m, \mathbb{K})$ und $B \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass dann

$$\text{Rang}(A) + \text{Rang}(B) - m \leq \text{Rang}(AB) \leq \min\{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\}$$

gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie die Matrizen als lineare Abbildungen und verwenden Sie die Dimensionsformel für $\tilde{A} := A|_{\text{Bild}(B)}$.

Aufgabe 23: Konvention beim Potenzieren (nicht abgeben)

Es ist üblich, $0^0 := 1$ zu setzen. Was ist der Grund dafür? Was spräche für welche andere Konvention? Warum überwiegen die Gründe für die Definition $0^0 := 1$?

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch, 20.5.2026.

Vokabeln: lineare Abbildung = linear mapping, Homomorphismus = homomorphism, Bild (einer linearen Abbildung) = image oder range, Kern = kernel oder null space, isomorph = isomorphic [aißomorfik], kanonisch = canonical, Ebene = plane, Gerade = (straight) line, Achse = axis, Drehung = rotation, Spiegelung = reflection, Projektion = projection, Vorzeichen = sign, Zeile = row, Spalte = column, Rang = rank, im Uhrzeigersinn = clockwise, entgegen dem Uhrzeigersinn = counterclockwise, cartesisches Koordinatensystem = Cartesian coordinate system, Ursprung (eines Koordinatensystems) = origin.