

LINEARE ALGEBRA 1: ÜBUNGSBLATT 6

Aufgabe 24: Relationen von Matrizen (30 Punkte)

- (a) Können Sie eine 2×2 -Matrix A finden mit $A^2 = 0$ (Nullmatrix), obwohl $A \neq 0$? Warum kann A nicht regulär sein?
- (b) Kann eine $n \times n$ -Matrix A , die weder E_n noch $-E_n$ ist, zu sich selbst invers sein, $A^{-1} = A$?
- (c) A, B, C seien reguläre $n \times n$ -Matrizen. $(ABC)^{-1} = ?$

Aufgabe 25: Matrixgruppen (20 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Automorphismen $L : V \rightarrow V$ mit Komposition als Verknüpfung eine Gruppe bilden. Man nennt sie $GL(V)$ ("general linear group"), für $V = \mathbb{K}^n$ auch $GL(n, \mathbb{K})$.
- (b) In der Relativitätstheorie spielen die Lorentz-Transformationen eine Schlüsselrolle, die in 2 Dimensionen die Form

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi \\ \sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix}$$

haben. Zeigen Sie, dass $A_\xi A_{\xi'} = A_{\xi+\xi'}$ und folgern Sie daraus, dass $\mathcal{L} := \{A_\xi \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{R})$ ist (genannt die Lorentz-Gruppe).

Aufgabe 26: Matrizen invertieren (25 Punkte)

Invertieren Sie die folgenden Matrizen mit dem Gauß-Jordan-Verfahren. Geben Sie explizit an, für welche Werte des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ dies möglich ist.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} i\lambda & -1 & i\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & i & \lambda \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27: Ein lineares Gleichungssystem (25 Punkte)

Benutzen Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren, um die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu bestimmen mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ -1 & -4 & 2 & 11 \\ -2 & -8 & 0 & 6 \\ -3 & -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: (freiwillig) Eschers Treppe (40 Bonuspunkte)

Zeichnen Sie Eschers unmögliche Treppe (Abb. 1) nach, wie in Abb. 2.

Vorbemerkung: Während Escher Zentralperspektive benutzt hat, benutzen wir die (einfachere) Parallelperspektive. Was ist das? Die Zentralperspektive ist die korrekte Art des Abbildens (wie beim Auge oder Foto): Wir benutzen ein Koordinatensystem im \mathbb{R}^3 mit dem Ursprung am Ort des Beobachters und dem Bild in der Ebene $x_1 = 1$. Ein Objekt (oder ein Punkt eines Objekts)

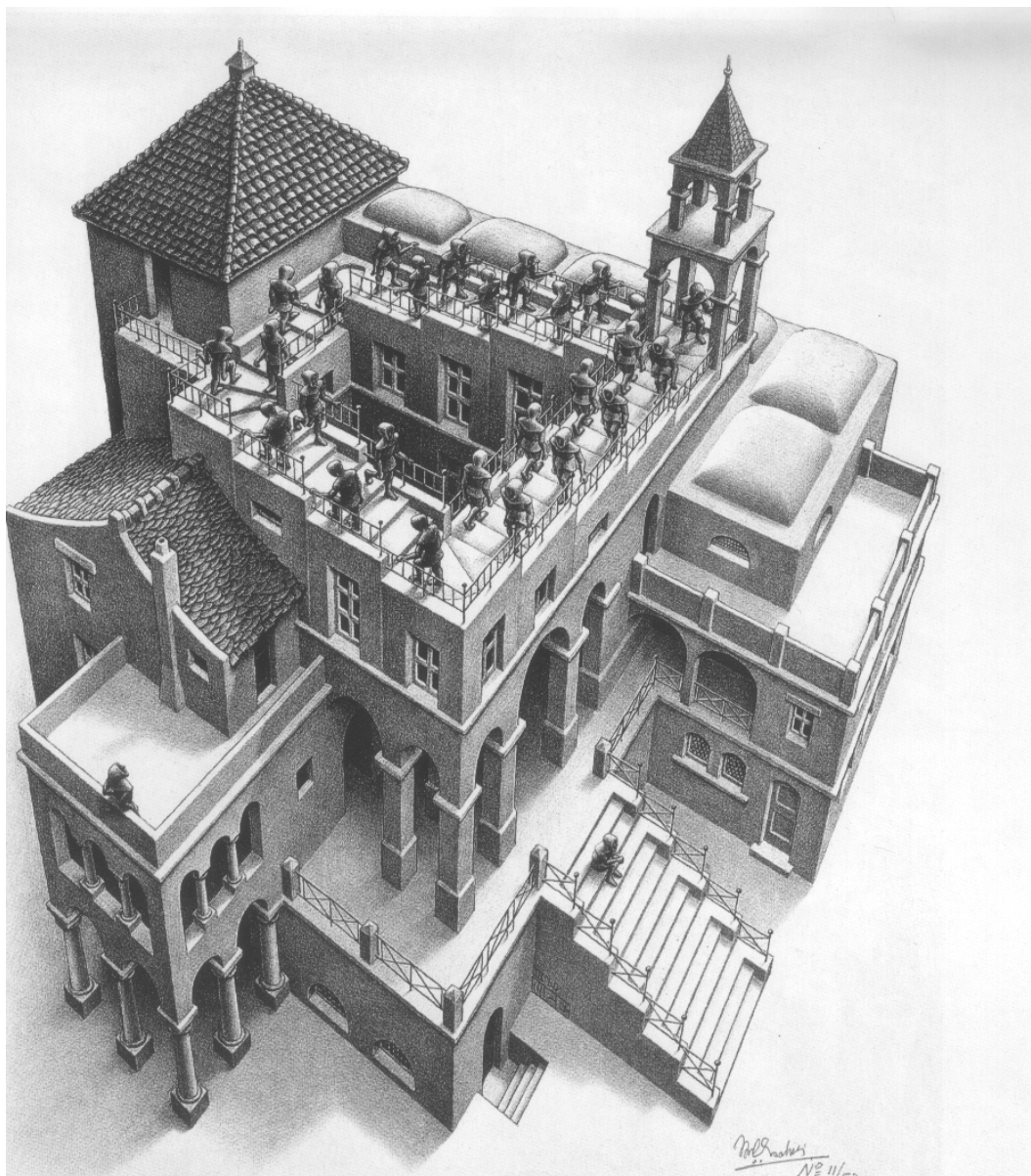


Abbildung 1: M. C. Escher (1898–1972), “Treppauf und treppab”, Lithografie (1960).

am Ort $u = (u_1, u_2, u_3)$ mit $u_1 > 0$ wird abgebildet auf denjenigen Punkt in der Bildebene, der vom Beobachter aus gesehen in derselben Richtung liegt wie das Objekt, also $g_z(u) = u_1^{-1}u = (1, u_2/u_1, u_3/u_1)$; die relevanten Koordinaten im Bild sind $f_z(u) = (u_2/u_1, u_3/u_1) \in \mathbb{R}^2$. Bei der Parallelperspektive hingegen bildet man den Punkt u auf $g_p(u) = (1, u_2, u_3)$ ab; die relevanten Koordinaten sind $f_p(u) = (u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2$. Die Parallelperspektive ist immer dann näherungsweise korrekt (bis auf eine zentrische Streckung), wenn sich die u_1 -Werte der abgebildeten Objekte nicht stark unterscheiden. Während die Abbilder paralleler Geraden in der Zentralperspektive “zusammenlaufen”, sind sie in der Parallelperspektive parallel. Noch etwas: Ein *Polygonzug* ist eine Aneinanderreihung gerader Strecken, von denen jede am Endpunkt der vorigen beginnt (wie z.B. in Abb. 2).

Anleitung zur Aufgabe: Wir verfolgen nur die Außenkante der Stufen und fassen (wie das Gelände in Eschers Bild) je drei Stufen zu einem Element zusammen. Wir betrachten drei Einheitsvektoren $e_x, e_y, e_z \in \mathbb{R}^3$, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen; diese Vektoren repräsentieren die drei Achsen des Gebäudes in Abb. 1. Wir setzen $v_x = f_p(e_x), v_y = f_p(e_y), v_z = f_p(e_z)$. Kennen wir

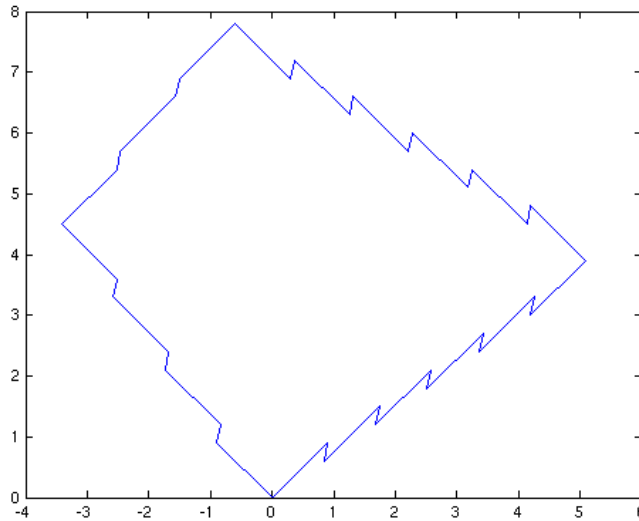


Abbildung 2: Außenkante der Treppe als Polygonzug.

von einem Punkt u das Abbild $f_p(u)$, so finden wir $f_p(u + \lambda e_x) = f_p(u) + \lambda v_x$ und entsprechend für e_y, e_z .

Der Trick an der unmöglichen Treppe besteht darin, dass ein Polygonzug im \mathbb{R}^3 , der eine Treppe entlang stets abwärts führt, unmöglich wieder am Ausgangspunkt ankommen kann, während sein Abbild sehr wohl am Abbild des Ausgangspunkts enden kann und daher in \mathbb{R}^2 einen geschlossenen Polygonzug bildet. Ist jede Stufe 10 cm hoch und 30 cm lang, dann ist jedes Stufenelement $\mu = 30$ cm hoch und $\lambda = 90$ cm lang. Der Weg im \mathbb{R}^3 entlang der Außenkante, an der dem Betrachter zugewandten Ecke beginnend, legt also zunächst die Strecke λ in x -Richtung zurück, dann $-\mu$ in z -Richtung, dann wieder λ in x -Richtung etc. (für die 6 Stufenelemente 6 mal λ in x -Richtung und 5 mal $-\mu$ in z -Richtung); dann λ in y -Richtung, $-\mu$ in z -Richtung etc. (6 Stufenelemente); dann $-\lambda$ in x -Richtung, $-\mu$ in z -Richtung (3 Stufenelemente); dann $-\lambda$ in y -Richtung, $-\mu$ in z -Richtung (4 Stufenelemente). Damit das Abbild dieses Weges geschlossen ist, muss in \mathbb{R}^2 gelten

$$6\lambda v_x - 5\mu v_z + 6\lambda v_y - 5\mu v_z - 3\lambda v_x - 2\mu v_z - 4\lambda v_y - 3\mu v_z = 0.$$

Wählen Sie Vektoren $v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}^2$ (zwei ausgesucht, der dritte aus der Gleichung bestimmt), die Eschers Bild einigermaßen nahekommen, und schreiben Sie ein Computer-Programm (in einer selbstgewählten Sprache, oder mit Hilfe einer Mathe-Software wie Matlab (kostenlos über das ZDV zu erhalten) oder Maple), das das Abbild des Weges in \mathbb{R}^2 plottet. Bitte geben Sie neben Ihrem Plot einen Ausdruck Ihres Quellcodes ab.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch 3.6.2026.

Vokabeln: Punktprodukt = dot product, invertierbar oder regulär = invertible oder regular, unendlich = infinite [*infini*], endlich = finite [*fainait*], den Vektor v nach der Basis B entwickeln = to expand the vector v in the basis B , transponiert = transposed oder transpose, Einheitsmatrix = unit matrix oder identity matrix, Zähler (eines Bruchs) = numerator, Nenner = denominator, Kehrwert = reciprocal value oder inverse, ist gleich = equals, Gleichung = equation, Ungleichung = inequality, Satz = theorem, Beweis = proof, Definition = definition, Kreis = circle, Kreisscheibe = disk, Kugel(fläche) = sphere, Kugel(inneres) = ball.