

LINEARE ALGEBRA 1: ÜBUNGSBLATT 7

Aufgabe 29: Zeilenstufenform (25 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix, indem Sie sie auf Zeilenstufenform bringen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 30: Keplersche Fassregel (25 Punkte)

Johannes Kepler gab 1615 in seiner *Nova stereometria* eine Formel für den Inhalt von Weinfässern an, die auf folgender Näherungsmethode beruht: Zur näherungsweise Berechnung von $\int_a^b f(x) dx$ betrachten wir die Stützstellen $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$ und $x_2 = b$ und setzen $y_k = f(x_k)$ für $k = 0, 1, 2$. Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom p und zeigen Sie

$$\int_a^b p(x) dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Aufgabe 31: Methode der kleinsten Quadrate (25 Punkte)

Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die Ausgleichsgerade durch die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$: $(0, 2)$, $(3, 8)$, $(4, 9)$, $(1, 5)$.

Aufgabe 32: Permutationen (25 Punkte)

Folgendes Problem trat vor ein paar Jahren in meiner Forschung über Quantenmechanik auf. Eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ nennt man eine Permutation; die Menge S_n aller Permutationen bildet mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe, genannt die symmetrische Gruppe oder Permutationsgruppe. Ein Unterraum U von $\mathbb{K}^n$ heiße *permutations-invariant*, wenn mit jedem Vektor $(x_1, \dots, x_n) \in U$ auch $(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \in U$ ist für jede Permutation $\pi \in S_n$. Zeigen Sie: Ist U ein permutations-invarianter Unterraum des $\mathbb{K}^n$, der den Vektor $c := (1, 1, 1, \dots, 1)$ enthält, dann ist entweder $U = \text{span}(c) = \mathbb{K}c$ oder $U = \mathbb{K}^n$.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch 10.6.2026.

Vokabeln: Formel = formula (Plural formulae oder formulas), Annahme = assumption, Voraussetzung (eines Satzes) = hypothesis [haipo(th)esis] (Plural hypotheses [haipo(th)esies]), elementare Zeilenumformung = elementary row operation, ähnliche Matrizen = similar matrices, Zeilenstufenform = row echelon [eschelon] form, nach x auflösen = solve for x , lösbar = solvable, eindeutig lösbar = uniquely solvable, universell lösbar = universally solvable, obere Dreiecksmatrix = upper triangular matrix, affiner Unterraum = affine [effain] subspace, Gaußsches Eliminationsverfahren = Gaussian elimination algorithm, Methode der kleinsten Quadrate = method of least squares.