

LINEARE ALGEBRA 1: ÜBUNGSBLATT 8

Aufgabe 33: Determinanten (20 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Welche sind folglich invertierbar?

a) Die der Drehmatrix $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$,

b) Die von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 4 & 0 & 11 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 34: Determinanten und Zeilenstufenform (30 Punkte)

- (a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n , dass die Determinante einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix durch das Produkt der Diagonaleinträge gegeben ist, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- (b) Wie verändert sich der Wert einer Determinante bei elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen?

Berechnen Sie die folgende Determinante, indem Sie sie durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf diagonale Zeilenstufenform bringen:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

(Sie brauchen in der Abgabe nicht alle Umformungsschritte hinzuschreiben; es genügt, die erreichte Zeilenstufenform anzugeben und daraus $|B|$ zu bestimmen.)

Aufgabe 35: Signum einer Permutation (25 Punkte)

Sei S_n die symmetrische Gruppe (Permutationsgruppe) von n Objekten.

- a) Wir definieren für jedes $\pi \in S_n$ einen Endomorphismus $L_\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$L_\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Welche Werte kann $\text{sgn}(\pi) := \det(L_\pi)$ ("Signum von π ") annehmen?

b) Welchen Wert hat $\text{sgn}(\sigma_{ij})$, wobei

$$\sigma_{ij}(k) = \begin{cases} k & \text{falls } k \notin \{i, j\} \\ j & \text{falls } k = i \\ i & \text{falls } k = j \end{cases}$$

die Transposition von i und j mit $i \neq j$ ist?

c) Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_n$. Zeigen Sie, dass $\text{sgn}(\pi_2 \circ \pi_1) = \text{sgn}(\pi_2) \text{sgn}(\pi_1)$.

Aufgabe 36: Leibnizsche Formel (25 Punkte)

Beweisen Sie die Leibnizsche Formel für die Determinante einer Matrix $A \in M(n, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$,

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}. \quad (1)$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die rechte Seite eine Determinantenform definiert. Dazu kann es nutzen, zuerst zu zeigen, dass die rechte Seite übereinstimmt mit

$$\sum_{\rho \in S_n} \text{sgn}(\rho) a_{\rho(1)1} \cdots a_{\rho(n)n}. \quad (2)$$

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch 17.6.2026.

Vokabeln: Mittelwert = mean (value), n Fakultät = n factorial, Determinante = determinant, nach der ersten Spalte entwickeln = to expand along the first column, alternierende Multilinearform = alternating multilinear form, Signum einer Permutation = sign of a permutation, Lösung = solution, rechter Winkel = right angle, Rechteck = rectangle, Dreieck = triangle, Rechenaufwand = computational cost, Näherung = approximation, Rauminhalt = volume, Flächeninhalt = area, Zylinder = cylinder, Kegel = cone, Kegelschnitt (d.h., Ellipse, Parabel oder Hyperbel) = conic section, Ellipse = ellipse, Parabel = parabola, Hyperbel = hyperbola.