

LINEARE ALGEBRA 1: ÜBUNGSBLATT 9

Aufgabe 37: Rechenaufwand (25 Punkte)

Determinanten von $n \times n$ Matrizen können auf unterschiedliche Art und Weise berechnet werden, und manche Verfahren sind effizienter als andere. Als Schätzwert für die Laufzeit betrachten wir die Anzahl der erforderlichen Multiplikationen. Die Überführung in Zeilenstufenform mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren erfordert (ungefähr) $n^3/3$ Multiplikationen; da man danach noch die Diagonaleinträge mit einander multiplizieren muss, kostet also diese Methode zur Berechnung der Determinante $E(n) = \frac{n^3}{3} + n - 1$ Multiplikationen. (Für eine typische Matrix sind alle Diagonaleinträge nach der Überführung $\neq 0$.)

- a) Bestimmen Sie (mit Begründung) eine Rekursionsformel für die Anzahl $L(n)$ der benötigten Multiplikationen, um die Determinante mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes (siehe Satz 4.4 c)) zu berechnen.
- b) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Anzahl $P(n)$ der benötigten Multiplikationen, um die Determinante mit Hilfe der Leibnizschen Formel (siehe Aufgabe 36) zu berechnen.
- c) Erstellen Sie eine Tabelle, in der Sie die Werte $E(n)$, $L(n)$ und $P(n)$ für $n = 2, \dots, 8$ eintragen. Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ lohnt sich das Vorgehen mithilfe des Eliminationsverfahrens?

Aufgabe 38: Die Spur (40 Punkte)

Die Spur einer $n \times n$ -Matrix A ist definiert durch

$$\text{Spur} A = \sum_{k=1}^n a_{kk}.$$

- a) Geben Sie ein Beispiel für $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ an mit $\text{Spur}(AB) \neq \text{Spur}(A) \cdot \text{Spur}(B)$.
- b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ gilt $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$.
- c) Folgern Sie aus b), dass ähnliche Matrizen und somit alle Matrixdarstellungen eines Endomorphismus $L : V \rightarrow V$ dieselbe Spur haben, die wir dann ebenfalls mit $\text{Spur} L$ bezeichnen.

(Bitte wenden!)

d) Seien nun m Matrizen $A_1, \dots, A_m \in M(n, \mathbb{K})$ gegeben. Folgern Sie aus b), dass

$$\text{Spur}(A_1 A_2 \cdots A_m) = \text{Spur}(A_m A_1 \cdots A_{m-1}).$$

Man sagt dazu, die Spur sei invariant unter zyklischer Vertauschung der Faktoren.

e) Die Pauli-Matrizen liegen in $M(2, \mathbb{C})$ und sind definiert durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\pi \in S_3$ eine Permutation von $\{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma_{\pi(1)} \sigma_{\pi(2)} = i \operatorname{sgn}(\pi) \sigma_{\pi(3)}.$$

f) Zeigen Sie mittels e), dass es 2×2 -Matrizen A, B, C gibt mit der Eigenschaft

$$\text{Spur}(ABC) \neq \text{Spur}(BAC).$$

Die Spur ist also nicht invariant unter *allen* Vertauschungen der Faktoren.

Aufgabe 39: Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen (25 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume in $\mathbb{R}^3$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wieso folgt daraus, dass A diagonalisierbar ist? Führen Sie die Diagonalisierung durch, d.h. bestimmen Sie S (invertierbar) und D (diagonal) so, dass $A = SDS^{-1}$.

Aufgabe 40: Spur und Determinante als Funktion der Eigenwerte (10 Punkte)

Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V)$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und geometrischen Vielfachheiten $n_1, \dots, n_r$. Drücken Sie $\text{Spur}(L)$ und $\det(L)$ durch die Eigenwerte von L aus.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch 24.6.2026.