

ÜBUNGSKLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA 1

Informationen zur Klausur: Die Klausur findet am Freitag 24.7.2026 um 8:05 Uhr (Einlass 8:00 Uhr) in Hörsaal N7 im Hörsaalzentrum Morgenstelle statt und dauert 100 Minuten. Bitte melden Sie sich SOWOHL auf <http://urm.math.uni-tuebingen.de> ALS AUCH auf <http://alma.uni-tuebingen.de> zur Klausur an. Eine weitere Klausur biete ich am Freitag 2.10.2026 an; es ist auch möglich, die erste Klausur auszulassen und an der zweiten teilzunehmen; falls Sie die erste Klausur bestehen, gibt es keine Möglichkeit zur Wiederholung.

Elektronische Geräte (wie Telefone, Taschenrechner, Hörgeräte, Digitaluhren) bitte vor Betreten des Klausur-Saales lautlos schalten und im Rucksack verstauen; während der Klausur ist nicht erlaubt, solche Geräte am Körper, an der Kleidung, auf dem Tisch oder in der Hand zu haben. Falls Sie aus medizinischen Gründen ein elektronisches Gerät brauchen, besprechen Sie dies frühzeitig mit mir. Nicht erlaubt während der Klausur ist außerdem die Nutzung von Büchern, Skripten oder eigenen Notizen von vor der Klausur. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass bei der Klausur die Nutzung unerlaubter Quellen eine Verletzung der akademischen Integrität darstellt und schwerwiegende Konsequenzen haben kann. Der Stoff der Klausur besteht aus Kapitel 1–7 aus dem Skript und den Übungsblättern 1–12; ausgenommen ist das Thema Minkowski-Raum (Abschnitt 6.41 im Skript). Alle Fakten, die in der Vorlesung erwähnt wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden. Hinweise zur Bearbeitung der Klausur: Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen. Streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Sie können die Aufgaben zu Hause lösen; sie werden nicht korrigiert. Die Punktzahlen addieren sich zu 100. Diese Übungsklausur ist sehr viel länger als die echte Klausur. Auch bei Ankreuzaufgaben dürfen Sie sich Rechnungen oder andere Notizen machen.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (12 Punkte)

Wenn wahr, geben Sie eine Begründung; wenn falsch, geben Sie ein Gegenbeispiel oder einen Ausschlussgrund.

- a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ für alle reellen 2×2 -Matrizen A, B .
- b) Wenn $A \in M(n, \mathbb{R})$ regulär ist und $B \in M(n, \mathbb{R})$ singulär, dann ist AB stets regulär.
- c) Wenn $A \in M(n, \mathbb{R})$ regulär ist und $B \in M(n, \mathbb{R})$ singulär, dann ist $A + B$ stets regulär.
- d) Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Aufgabe 2: Matrix-Multiplikation (3 Punkte)

Finden Sie ein Beispiel einer 2×2 -Matrix $A \neq 0$, so dass $A^2 = 0$.

Aufgabe 3: Inverse Matrix (7 Punkte)

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{bmatrix}$, wobei a, b, c Parameter sind.

Berechnen Sie A^{-1} nach dem Gauß-Jordan-Verfahren. Überprüfen Sie Ihre Antwort, indem Sie $A^{-1}A$ berechnen.

Aufgabe 4: Zeilenumformung (6 Punkte)

Für jede der angegebenen Matrizen: Kann man sie aus $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ durch eine *einzelne* elementare Zeilenumformung erhalten?

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja
☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein

Aufgabe 5: Determinante (5 Punkte)

Sei $R = \begin{bmatrix} a & u & w \\ 0 & b & v \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, wobei $a > 0, b > 0, c > 0$ und u, v, w reelle Zahlen sind. Sei $A = R^T R$.

Benutzen Sie Eigenschaften der Determinante, um $\det(A)$ durch a, b, c, u, v, w auszudrücken.

Aufgabe 6: Gauß-Verfahren (6 Punkte)

Benutzen Sie elementare Zeilenumformungen nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren, um die gegebene Matrix in allgemeine Zeilenstufenform zu bringen. Welchen Rang hat die Matrix? Geben Sie jeweils im Kästchen an, welche Zeilenumformung Sie verwenden (z.B. $R_3 + 3R_2$ oder $R_1 \leftrightarrow R_4$). (Die Zahl der Schritte kann geringer sein als die der eingezeichneten Felder für Matrizen.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Lineare Abhängigkeit (6 Punkte)

a) Ist die folgende Menge linear abhängig oder unabhängig in $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Gibt es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$L \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

(Beachten Sie, dass es sich um dieselben Vektoren wie bei Teil a) handelt.) Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8: Beweis (12 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit $\dim V = n$ und $U \subset V$ ein Unterraum mit $\dim U = n - 1$. Zeigen Sie:

Ist W ein Unterraum von V , so ist $\dim(W \cap U) \geq \dim W - 1$.

Aufgabe 9: Matrix-Darstellung eines Endomorphismus (5 Punkte)

Sei $P_{\mathbb{R}}^{(n)}$ der Vektorraum aller reellen Polynome $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ vom Grade $\leq n$. Sei L die lineare Abbildung von $P_{\mathbb{R}}^{(1)}$ nach $P_{\mathbb{R}}^{(2)}$ gegeben durch

$$Lp(x) = 3x^2 \frac{d}{dx} p(x) + (4x + 5)p(x).$$

Bestimmen Sie die 3×2 -Matrix $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(L)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (1, x)$ von $P_{\mathbb{R}}^{(1)}$ und der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ von $P_{\mathbb{R}}^{(2)}$.

Aufgabe 10: Gram-Schmidt-Verfahren (7 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.
- (b) Orthonormieren Sie die kanonische Basis (e_1, e_2, e_3) des $\mathbb{R}^3$ bzgl. des Skalarprodukts $S_A(x, y) := \langle x, Ay \rangle$ unter Verwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

Aufgabe 11: Komplexe Matrizen (4 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- | | |
|---|--|
| ☐ A ist selbstadjungiert | ☐ A ist eine Projektion |
| ☐ A ist unitär | ☐ A ist invertierbar |

Aufgabe 12: Duale Basis (5 Punkte)

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie die duale Basis $\hat{v}_1, \hat{v}_2$. (Schreiben Sie dabei $\hat{v}_1$ und $\hat{v}_2$ als Zeilenvektoren.)

Aufgabe 13: Kleinste Quadrate (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für (z.B.) $A \in M(3 \times 2, \mathbb{R})$ die orthogonale Projektion P von $\mathbb{R}^3$ auf Bild A durch $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ gegeben ist, sofern $A^T A$ invertierbar ist.

(a) Seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Verifizieren Sie, dass hier $A^T A$ invertierbar ist, und berechnen Sie P und Py . Erläutern Sie, warum das Ergebnis zeigt, dass die Gleichung $Ax = y$ keine Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie den Vektor u in $\mathbb{R}^2$, für den $\|Au - y\| = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - y\|$, und berechnen Sie $\|Au - y\|$.

Aufgabe 14: Diagonalisierung rückwärts (6 Punkte)

Über eine Matrix $A \in M(2, \mathbb{R})$ wissen wir, dass sie die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 0$ hat und die zugehörigen Eigenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Wieso wissen Sie dann, dass A symmetrisch ist?
- (b) Bestimmen Sie die Determinante und die Spur von A , ohne A zu berechnen. Begründen Sie Ihre Antwort.
- (c) Berechnen Sie A .

Aufgabe 15: Beweis (10 Punkte)

Sei $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\| = 1$, aufgefasst als Spaltenvektor. Zeigen Sie, dass die $n \times n$ -Matrix $Q = E - 2uu^T$ sowohl symmetrisch als auch orthogonal ist.