

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 4 (Abgabe spätestens 16.05.2026, 23:59)

Aufgabe 16¹

(keine Abgabe)

Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{x}' = D_\phi \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

bewirkt eine Drehung des Vektors \vec{x} um den Winkel ϕ .

- Illustrieren Sie dies für $\phi = \frac{\pi}{4}$ und die Vektoren $(2, 0)^T$ und $(-1, 1)^T$ mit einer Zeichnung.
- Zeigen Sie: $D_\phi^{-1} = D_\phi^T = D_{-\phi}$ (d.h. $\vec{x} = D_{-\phi} \vec{x}'$).

Aufgabe 17

(freiwillige Abgabe)

- Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix D_ϕ aus Aufgabe 16 sowie alle zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 18

(freiwillige Abgabe)

Wir möchten alle Lösungen $y(x)$ der DGL²

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 5y'' + 4y' + 4y = 2x + 20$$

finden. Dazu betrachten wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung und machen den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

- Welche Gleichung muss λ erfüllen?
- Welche λ lösen diese Gleichung? HINWEIS: $\lambda = i$ ist darunter.
- Geben Sie dementsprechend 4 linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung an.
HINWEIS: Eine doppelte Lösung der Bestimmungsgleichung für λ behandeln Sie wie bei DGLn zweiter Ordnung.
- Raten Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung.
- Geben Sie alle Lösungen der inhomogenen Gleichung an.

¹Diese Aufgabe wiederholt die Matrix-Vektor-Multiplikation aus dem Wintersemester.

²Zur Erinnerung: $y^{(2)} = y''$