Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2026

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 6 (Abgabe spätestens 06.06.2026, 23:59!)

Aufgabe 23 (freiwillige Abgabe)

a) Führen Sie die HAT für die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T AU$ an.

b) Berechnen Sie e^{-Cx} für $x \in \mathbb{R}$ und C aus Aufgabe 17.
Hinweis: Diagonalisieren Sie dazu die Matrix C.

Aufgabe 24 (freiwillige Abgabe)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 1$

b) $2x^2 + 12xy - 7y^2 = 5$

c) $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25$

d) $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8$

Aufgabe 25 (keine Abgabe)

Wir nennen

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}\,, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}\,,$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von $\vec{y}$ Funktionen von x, und $\vec{y}\,'$ ist die komponentenweise Ableitung nach x, d.h.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}\,, \quad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}\,.$$

a) Rechnen Sie nach: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{u}$, so ist

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes $\vec{y}$ der Form

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{Ax}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig},$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, mit A aus Aufgabe 23.

Aufgabe 26 [1] (keine Abgabe)

Funktionen von zwei Variablen können wir auf verschiedene Arten visualisieren, z.B. durch das Zeichnen von Höhenlinien oder als perspektivische Zeichnung des Graphs der Funktion.

Wir betrachen die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 \quad \text{und} \quad g(x, y) = y^2 - x^2 \,.$$

a) Visualisieren Sie die Funktionen mittels Höhenlinien, d.h. zeichnen Sie z.B. in einem Diagramm $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 1$ sowie $f(x, y) = 4$ und in einem anderen Diagramm $g(x, y) = 0$, $g(x, y) = 1$ und $g(x, y) = -1$. Denken Sie dabei an die Ellipsen und Hyperbeln aus der Vorlesung vom 22.05.25 oder aus den Aufgaben 7 & 13.

b) Fertigen Sie nun auch perspektivische Skizzen der Graphen der beiden Funktionen an, entweder mit Stift und Papier oder mithilfe eines Computers, vgl. z.B. `https://www.wolframalpha.com/input?i=2x%5E2-x%5E4-y%5E2`.

Machen Sie sich auch den Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen klar.

[1] Diese Aufgabe bezieht sich nicht auf den aktuellen Vorlesungsstoff, aber die Bearbeitung *jetzt*, ist hilfreich für die Themen, die *nach Pfingsten* kommen.