

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 9 (Abgabe spätestens 27.06.2026, 23:59)

Aufgabe 32

(keine Abgabe)

Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f} d\vec{x}$, $j = 1, 2, 3$, für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,

b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und

c) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie auch jeweils den Anfangs- und den Endpunkt des Integrationswegs an.

Ist $\vec{f}$ konservativ, d.h. gibt es ein $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{f} = \nabla F$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 33

(freiwillige Abgabe)

Bestimmen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f} d\vec{x}$, $j = 1, 2$, für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} ze^{xz} - 2x \cos(x^2 + y^2) \\ e^{-y^2} - 2y \cos(x^2 + y^2) \\ xe^{xz} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\text{sowie} \quad \mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \log(1 + 3t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Zeichnen Sie außerdem $\mathfrak{K}_1$.

Aufgabe 34

(freiwillige Abgabe)

Wir betrachten nochmal die Funktionen f und q aus Aufgabe 30. Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen und geben Sie die Hesse-Matrizen $f''(\vec{x})$ und $q''(\vec{x})$ an.

Aufgabe 35

(freiwillige Abgabe)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x, y) = \frac{e^{-x^2}}{1 - y^2}$ um $(0, 0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x, y, z) = \sin(xz) - \cos(y) + xy(z - 1)^{20}$ und $g(x, y) = \frac{e^y - x}{1 + x^2}$.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt $(0, -1, 1)$ von

$$f(x, y, z) = z^3 - 3z^2 + x^2 + 4yx + 2y + z + 20.$$

HINWEIS: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 36

(freiwillige Abgabe)

Wenn wir $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können wir auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))^T$ definieren wir

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad (\text{Divergenz})$$

und speziell für $n = 3$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (\text{Rotation}).$$

Im Fall $n = 3$ schreiben wir statt x_1, x_2, x_3 auch gerne x, y, z .

Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div} \vec{f}$, $\operatorname{rot} \vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z + y \cos z \\ x + y \\ y \sin(xz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$