

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 10 (Abgabe spätestens 04.07.2026, 23:59)

Aufgabe 37

(freiwillige Abgabe)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen

$$f(x, y) = (x - y)^4 - 7(x^2 + y^2) + 18xy \quad \text{und} \quad g(x, y) = y^2 - y^4 + \sin(x),$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$ (bzw. $\nabla g = 0$). Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 38

(freiwillige Abgabe)

Ist $y + xy^2 - e^{xy} = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sie ggf. auch $f'(0)$.

Aufgabe 39

(freiwillige Abgabe)

Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach $\vec{y} = f(\vec{x})$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

aauflösen lässt, und berechnen Sie $f'(0, -1)$.

Aufgabe 40

(freiwillige Abgabe)

Für Umgebungen welcher Punkte (x_0, y_0) lässt sich die Gleichung

$$y^2 = x^3 + x^2$$

jeweils lokal nach y auflösen? Und wo lässt sie sich lokal nach x auflösen? Illustrieren Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll in einem Diagramm.

Aufgabe 41 (Fortsetzung von Aufgabe 19)

(freiwillige Abgabe)

Die Lösung von Aufgabe 19c war ein DGL-System der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} = f(s(t), c(t))$$

mit einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- a) Wählen Sie positive Parameter k_1, k_2, k_3 und e_0 . Visualisieren Sie die Funktion f , indem Sie in der sc -Ebene an Punkten mit den Koordinaten (s, c) Pfeilchen $f(s, c)$ einzeichnen. Wählen Sie den Bereich in der sc -Ebene sinnvoll. Wählen Sie die absolute Länge der Pfeile beliebig aber sinnvoll, die relative Länge der Pfeile muss stimmen.

HINWEIS: Sie dürfen zum Zeichnen auch einen Computer verwenden. Tippen Sie z.B. auf www.wolframalpha.com den Ausdruck `vector field plot` ein: Sie sehen dann genau so eine Visualisierung einer (anderen) Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, und es wird Ihnen ein Formular angezeigt, in dem Sie die Funktion und den Plot-Bereich eingeben können.

Lösungen des DGL-Systems entsprechen Kurven in der sc -Ebene, deren Tangentialvektoren (“Geschwindigkeitsvektoren”) an jeder Stelle durch die Pfeilchen des Plots aus Teil a gegeben sind. (Warum?)

- b) Zeichnen Sie zwei oder drei Lösungen des DGL-Systems für Anfangsbedingungen der Form $(s(0), c(0)) = (s_0, 0)$, mit $s_0 > 0$, in Ihr(e) Diagramm(e) aus Teil a ein. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabe 19f.

Es gilt $f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $(s(t), c(t)) = (0, 0) \forall t$ ist eine Lösung des DGL-Systems.¹ Für kleine s und c approximieren wir das DGL-System durch das lineare DGL-System (warum?)

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = f'(0, 0) \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}.$$

- c) Bestimmen Sie $f'(s, c)$.
d) Untersuchen Sie $f'(0, 0)$ auf Definitheit.
e) Wie sehen verschiedene Lösungen des linearen DGL-Systems (qualitativ) aus?
HINWEIS: Denken Sie dabei v.a. an Aufgabe 25a.
f) Wo und wie manifestiert sich das Verhalten aus Teil e in dem/den Plot(s) aus Teil a?

¹Wir nennen daher $(0, 0)$ einen Fixpunkt des DGL-Systems.