

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Klausur am 28.07.2026

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 98 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(5+10 = 15 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_{-\infty}^0 e^x \sin x \, dx$ b) $\int_2^3 \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^2} \, dx$

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' = x \sin y$, $y(1) = -\pi$.

Aufgabe 3

(4+4+4 = 12 Punkte)

- a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 2y' + 2y = 0$.
- b) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 2y' + 2y = 1 - e^{-x}$.
- c) Lösen Sie das AWP $y'' + 2y' + 2y = 1 - e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Aufgabe 4

(3+5+1+3 = 12 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie A^2 und A^3 .
- b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A .
- c) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort in *einem* Satz.
- d) Berechnen Sie $\exp(Ax)$ für $x \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie Ihr Ergebnis als *eine* Matrix.

ZUR ERINNERUNG: $\exp(Ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} x^n$ und $A^0 = I$.

Aufgabe 5

(3+7 = 10 Punkte)

Seien λ_j ($j = 1, \dots, n$) paarweise verschiedene Eigenwerte der Matrix A mit zugehörigen Eigenvektoren $\vec{u}_j$, d.h. $A\vec{u}_j = \lambda_j\vec{u}_j$. Weiter sei $\vec{x}$ eine Linearkombination der $\vec{u}_\ell$, d.h.

$$\vec{x} = \sum_{\ell=1}^n c_\ell \vec{u}_\ell \quad \text{mit} \quad c_\ell \in \mathbb{C}.$$

Für $j \neq k$ definieren wir

$$Q_j = \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

- a) Zeigen Sie: $\vec{u}_\ell$ ist Eigenvektor von Q_j und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.
- b) Sei nun $P_k = \prod_{j \neq k} Q_j$. Berechnen Sie $P_k \vec{x}$.

Aufgabe 6

(12 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x, y) = (x - y)^3 - 2x^2 - 2y^2 + 8xy,$$

d.h. alle (x, y) mit $(\nabla f)(x, y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 7

(4+9+2+2 = 17 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = 3x + 5y \quad \text{und} \quad g(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2.$$

- a) Untersuchen Sie die quadratische Form g auf Definitheit. Was für ein Kegelschnitt wird durch $g(x, y) = 13$ beschrieben?
- b) Bestimmen Sie alle potentiellen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 13$.
- c) Welche Werte nimmt f an den in Teil (b) gefundenen Stellen an?
- d) Begründen Sie kurz, dass es sich bei den in Teil (c) gefunden Werten um Minimum und Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 13$ handelt.

Aufgabe 8

(6 Punkte)

Sei $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f} d\vec{x}$.

Aufgabe 9

(8 Punkte)

Berechnen Sie die Oberfläche des Kegelmantels

$$M = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} (2-z) \cos \phi \\ (2-z) \sin \phi \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 \leq z \leq 2 \end{matrix} \right\},$$

d.h. berechnen Sie $|M| = \iint_M dO$.