Prof. Dr. Roderich Tumulka, Julian Schmidt
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2018
6. November 2018

Analysis 2

Übungsblatt 5

Aufgabe 20: Zum Banachschen Fixpunktsatz (15 Punkte)

(a) Sei $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums (X, d), $\phi : A \to A$ eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $\theta < 1$, $x_0 \in A$ und $a := \lim_{n\to\infty} x_n$ der Limes der zugehörigen Iterationsfolge

$$x_{n+1} := \phi(x_n)\,.$$

Zeigen Sie, dass $d(x_n, a) \leq \theta^n d(x_0, a)$.

(b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall und $\phi : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass ϕ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \|\phi'\|_\infty$ ist. (Insbesondere ist ϕ also eine Kontraktion, wenn $\|\phi'\|_\infty < 1$ und $\phi(I) \subset I$ ist.)

Hinweis: Erster Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

Aufgabe 21: Das Newton-Verfahren und der Banachsche Fixpunktsatz (45 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Machen Sie sich klar, dass

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \phi(x)\,.$$

Es ist also a genau dann Nullstelle von f wenn a Fixpunkt von ϕ ist. Das Newton-Verfahren besteht nun darin, die Nullstellen von f durch Iterationsfolgen $x_{n+1} = \phi(x_n)$ zu approximieren.

(a) Überlegen Sie sich zunächst geometrisch anhand einer Zeichnung, warum zu erwarten ist, dass die Folge (x_n) gegen eine Nullstelle von f konvergiert, falls der Startwert x_0 hinreichend nahe an einer Nullstelle liegt.

Nun nehmen wir zusätzlich an, dass f bei a im Innern von I eine Nullstelle hat, also $f(a) = 0$ gilt, und setzen $I_0 := [a - \delta_0, a + \delta_0]$ mit $\delta_0 > 0$ so klein, dass $I_0 \subset I$.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 20(b), dass $\phi|_{I_0}$ eine Kontraktion ist, wenn man $\delta_0 > 0$ klein genug wählt, also $\phi(I_0) \subset I_0$ und $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \theta_0 |x - y|$ für ein $\theta_0 < 1$ und alle $x, y \in I_0$ gilt.

Zwischenergebnis: Man kann $\theta_0 = K\delta_0$ wählen, wobei $K = \frac{c_1 c_2}{c_3}$ mit $c_1 = \sup_{x\in I_0} |f'(x)|$, $c_2 = \sup_{x\in I_0} |f''(x)|$ und $c_3 = \inf_{x\in I_0} |f'(x)|^2$.

Insbesondere konvergiert also das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in I_0$ gegen die Nullstelle a, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ für die Iterationsfolge $x_{n+1} = \phi(x_n)$.

(c) Geben Sie eine Schranke für den Fehler im n-ten Schritt an, also ein $S_n < \infty$ so, dass $|x_n - a| \leq S_n$ und $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$. *Hinweis:* Aufgabe 20(a).

(d) Verbessern Sie die Schranke aus (c) (d.h. finden Sie eine kleinere Schranke s_n), indem Sie die Newton-Iteration auf einer Folge von geeigneten Intervallen $I_n := [a - \delta_n, a + \delta_n]$ betrachten und jeweils auch θ_n neu abschätzen.

Ergebnis: Es gilt $|x_n - a| \leq \theta_0^{2^n - 1} |x_0 - a|$.

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren in diesem Fall für alle Startwerte $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $a = \sqrt{2}$ konvergiert. Geben Sie für den Startwert $x_0 = \frac{3}{2}$ unter Verwendung von Teil (d) eine explizite Schranke an den Fehler $|x_n - \sqrt{2}|$ im n-ten Schritt an. Wieviele Schritte sind also nötig, um 15 Nachkommastellen von $\sqrt{2}$ korrekt zu berechnen?

Aufgabe 22: Die Einheitskugel in normierten Räumen (20 Punkte)

Der Satz von Heine-Borel aus der Vorlesung besagt insbesondere, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B}_1(0) := \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$ in einem endlichdimensionalen normierten Raum V kompakt ist. Tatsächlich kann man auch die Umkehrung zeigen: ist die Einheitskugel in einem normierten Raum kompakt, so hat der Raum endliche Dimension. Wir werden in dieser Aufgabe ein Beispiel eines unendlichdimensionalen normierten Raumes kennenlernen, dessen Einheitskugel nicht kompakt ist.

Sei $\ell^2_{\mathbb{R}} := \{(x_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ der Raum der quadratsummierbaren reellen Folgen mit der Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$ für $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2_{\mathbb{R}}$. Wir stellen uns hier also geometrisch den unendlichdimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^\infty$ vor. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B}_1(0)$ in $(\ell^2_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_2)$ nicht kompakt ist. (*Hinweis:* Finden Sie eine Folge in $\overline{B}_1(0)$, die keine konvergente Teilfolge hat, und argumentieren Sie mit Bolzano-Weierstraß.)

Aufgabe 23: Greensche Funktionen (20 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $n > 2$, gegeben durch $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\alpha}$. Bestimmen Sie α so, dass

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0.$$

Bemerkung: Die Lösung der Gleichung $\Delta f = \delta$ im $\mathbb{R}^n$ heißt Greensche Funktion des Laplace-Operators $\Delta = \sum_j \partial^2/\partial x_j^2$ im $\mathbb{R}^n$. Hier ist δ die Diracsche Delta-Distribution am Ursprung. Sie haben in der Aufgabe allerdings nur gezeigt, dass f die Gleichung $\Delta f = 0$ außerhalb des Ursprungs erfüllt.

Abgabe: Bis Freitag 16.11.2018 um 16:00 Uhr in den Briefkasten Ihres Übungsleiters im C-Bau Ebene 3.