

## ANALYSIS 2

### Übungsblatt 6

#### Aufgabe 24: Satz von Schwarz (20 Punkte)

Die Funktion  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  habe partielle Ableitungen der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + g(y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3x. \quad (1)$$

Hierbei sei  $g$  eine differenzierbare Funktion (die nur von  $y$  abhängt).

- Bestimmen Sie  $g$  bis auf Addition einer Konstante.
- Bestimmen Sie (mit Begründung) alle Funktionen  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  mit partiellen Ableitungen der Form (1).

#### Aufgabe 25: Differenzierbarkeit (30 Punkte)

Sei  $E$  eine Euklidische Ebene. Eine Funktion  $U : E \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich in Cartesischen Koordinaten als  $u(x, y)$  oder in Polarkoordinaten als  $\tilde{u}(r, \varphi)$  ausdrücken.

- Drücken Sie  $u(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ , definiert für  $(x, y) \neq (0, 0)$ , in Polarkoordinaten aus, zeichnen Sie das Konturdiagramm, und zeigen Sie, dass  $u$  sich nicht stetig in  $(0, 0)$  fortsetzen lässt.
- Wie lauten affin-lineare Funktionen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in Polarkoordinaten?

Wir betrachten nun Funktionen der Form  $\tilde{u}(r, \varphi) = r g(\varphi)$ , wobei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodisch ist.

- Wann (d.h. unter welcher Bedingung an  $g$ ) ist  $u$  im Ursprung partiell differenzierbar?
- Wann existiert die Richtungsableitung von  $u$  im Ursprung in Richtung  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ ? Wie lautet sie dann?
- Wann ist  $u$  im Ursprung total differenzierbar? (*Tipp*: Wenn  $u$  total differenzierbar ist, wie hängt dann die Richtungsableitung in Richtung  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  von  $\varphi$  ab?)
- Geben Sie ein Beispiel für  $g$  und damit auch  $u$ , für das alle Richtungsableitungen von  $u$  existieren,  $u$  aber nicht total differenzierbar ist.

#### Aufgabe 26: Laplace-Operator (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich  $\Delta u$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  wie folgt in Polarkoordinaten ausdrücken lässt:

$$\widetilde{\Delta u} = \partial_r^2 \tilde{u} + \frac{1}{r} \partial_r \tilde{u} + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \tilde{u}.$$

### Aufgabe 27: Newtonsche Mechanik (25 Punkte)

Die Newtonsche Mechanik ist eine physikalische Theorie, die besagt, dass das Universum aus  $N$  Materiepunkten (genannt Teilchen) besteht, die sich im Laufe der Zeit in einem 3-dimensionalen Euklidischen Raum bewegen (in dem wir ein Cartesisches Koordinatensystem einführen). Dabei gehorcht die Position  $\mathbf{q}_k(t) \in \mathbb{R}^3$  des  $k$ -ten Teilchens zur Zeit  $t$  der Bewegungsgleichung

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{q}_k}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N G m_j m_k \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|^3} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{e_j e_k}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|^3}. \quad (2)$$

Hierbei ist  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm in  $\mathbb{R}^3$ ,  $G$  und  $\varepsilon_0$  sind Naturkonstanten und  $m_k > 0$ ,  $e_k$  Konstanten, genannt die Masse und die elektrische Ladung des  $k$ -ten Teilchens. Die *Energie* des Universums zur Zeit  $t$  ist definiert als

$$E(t) = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \left\| \frac{d\mathbf{q}_k}{dt} \right\|^2 - \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^N \left( G m_j m_k - \frac{e_j e_k}{4\pi \varepsilon_0} \right) \frac{1}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|}. \quad (3)$$

Zeigen Sie:  $E$  ist eine Erhaltungsgröße, d.h. zeitunabhängig.

*Tipp:* Berechnen Sie  $dE/dt$ .

**Englisch-Vokabeln** (freiwillig): Polarkoordinaten = polar coordinates, Kugelkoordinaten = spherical coordinates, Konturdiagramm = contour plot, Metrik = metric, metrischer Raum = metric space, Euklidisch = Euclidean, induziert = induced, Norm = norm, normierter Raum = normed space, Umgebung = neighborhood, innerer Punkt = interior point, das Innere = the interior, Abschluss = closure, Rand = boundary, topologischer Raum = topological space, vollständig = complete, folgenstetig = sequentially continuous, Urbild = pre-image, beschränkt = bounded, Schranke = bound.

**Abgabe:** Bis Freitag 23.11.2018 um 16:00 Uhr in den Briefkasten Ihres Übungsleiters im C-Bau Ebene 3.