

ANALYSIS 2

Übungsblatt 10

Aufgabe 40: Reihenfolge (25 Punkte)

Sei $f(y) = \min(1, \ln(1/y))$. Zeichnen Sie den Integrationsbereich im \mathbb{R}^2 des Integrals

$$\int_0^1 \left(\int_0^{f(y)} xy \, dx \right) dy$$

und berechnen Sie seinen Wert in *beiden* Integrationsreihenfolgen.

Aufgabe 41: Induktion (25 Punkte)

Sei $c > 0$ und sei

$$A_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \, \forall i, \, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq c\}.$$

Zeigen Sie durch Induktion, dass für das Volumen gilt $\text{Vol}(A_n) = \frac{c^n}{n!}$.

Aufgabe 42: Kardioide (20 Punkte)

Die Gleichung $r = 1 + \cos \varphi$ beschreibt in Polarkoordinaten eine geschlossene Kurve im \mathbb{R}^2 , genannt Kardioide. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Kardioide eingeschlossenen Fläche.

Aufgabe 43: Uneigentliche Integrale in \mathbb{R}^n (30 Punkte)

Für die folgenden Funktionen $f(x, y)$ ist das Integral $I_0 := \int_{[0,1]^2} f(x, y) \, d(x, y)$ nicht definiert, weil f nicht überall auf $[0, 1]^2$ definiert ist und, selbst wenn man f überall irgendwie definierte, nicht stetig wäre. Trotzdem könnte aber

$$I := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[\varepsilon, 1]^2} f(x, y) \, d(x, y)$$

in \mathbb{R} existieren; man sagt dann, dass I_0 *als uneigentliches Integral konvergiert*. Bestimmen Sie jeweils, ob das Integral konvergiert, und gegebenenfalls den Wert.

$$(a) \, f_1(x, y) = \frac{1}{xy}, \quad (b) \, f_2(x, y) = \frac{1}{x+y}, \quad (c) \, f_3(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Abgabe: Bis Freitag 21.12.2018 um 16:00 Uhr in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.