Prof. Dr. Roderich Tumulka, Julian Schmidt
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2018
8. Januar 2019

Analysis 2

Übungsblatt 11

Aufgabe 44: Integration in Kugelkoordinaten

Sei $X = (0,\infty) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}^3$ dann ist $\Phi : X \to \Phi(X) \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta) =: (x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi))$$

ein Diffeomorphismus und beschreibt Kugelkoordinaten auf dem $\mathbb{R}^3$.

Stellen Sie die folgenden Funktionen in Kugelkoordinaten dar und berechnen Sie jeweils mit Hilfe der Transformationsformel das Integral über die Einheitskugel $B := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^3$:

(a) $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = 1$

(b) $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = x^2 + y^2$

Aufgabe 45: Separation der Variablen

Lösen Sie jeweils das Anfangswertproblem $\quad \dot{x}(t) = f(t,x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad$ für

(a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t,x) = tx$

(b) $f : \mathbb{R} \times (0,\pi) \to \mathbb{R},\ f(t,x) = \dfrac{t^2}{\sin x}$.

Aufgabe 46: Populationsmodell

Für die Größe $P(t)$ einer Fischpopulation in einem See nach t Jahren nehmen wird folgendes Modell an:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - \beta P^2$$

with $\alpha = 4/\text{Jahr}$ und $\beta = 10^{-2}/\text{Jahr}$. (Der erste Term kann z.B. daher kommen, dass mehr Fische auch mehr Nachkommen haben, der zweite daher, dass zu viele Fische sich gegenseitig Ressourcen wie Nahrung wegnehmen werden.)

(a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen und ermitteln sie, welche stabil, instabil oder halbstabil sind. Welche Gleichgewichtsgröße der Population wird sich einstellen?

(b) Es soll das Angeln erlaubt werden, und es stellt sich die Frage, wieviele Anglerlizenzen erteilt werden sollen. Nehmen Sie an, dass ein durchschnittlicher Angler 5 Fische pro Jahr fängt. Stellen Sie die modifizierte ODE auf für die Situation, dass L Lizenzen vergeben werden, und bestimmen Sie die Gleichgewichtsgröße der Population.

(c) Unter welchem Wert muss L liegen, damit die Population nicht ausstirbt?

Aufgabe 47: Stetige Verzinsung

Alfred möchte ein Haus kaufen und braucht dafür ein Darlehen von einer Bank; er kann sich monatliche Zahlungen von 1000 Euro leisten. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass Zinsen kontinuierlich anfallen mit der Rate $r = 0.05/\text{Jahr}$, und dass Alfred seine Zahlungen kontinuierlich leistet.

(a) Stellen Sie eine ODE auf für die von Alfred an die Bank geschuldetet Summe $x(t)$ nach t Jahren.

(b) Lösen Sie die ODE für $x(0) = M$.

(c) Bestimmen Sie die maximale Darlehenssumme M, die Alfred sich zu leihen leisten kann, wenn die Laufzeit des Darlehens 20 Jahre betragen soll.

Aufgabe 48: Eindeutigkeit von Lösungen?

Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x) = \sqrt{|x|}$. Bestimmen Sie alle Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $\dot{x} = v(x)$ zum Anfangswert $x(0) = -1$ und skizzieren Sie einige der Lösungen in einem Raum-Zeit-Diagramm!

Abgabe: Bis Freitag 18.1.2019 um 16:00 Uhr in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.