Analysis 2

Übungsblatt 12

Aufgabe 49: Mehrfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms (25 Punkte)

Sei P ein komplexes Polynom in einer Variablen λ. Zeigen Sie: Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ eine r-fache Nullstelle von P ist, dann sind alle Funktionen $x_m(t) = t^m e^{\lambda t}$ mit $m = 0, 1, \ldots, r-1$ Lösungen der Differentialgleichung $P(\frac{d}{dt})x(t) = 0$.

Hinweis: Es ist $P(z) = Q(z)(z-\lambda)^r$ mit einem Polynom $Q(z)$; man betrachte $(\frac{d}{dt} - \lambda)^r x_m(t)$.

Aufgabe 50: Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten (25 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v : G \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L. Für $x \in G$ sei $\gamma_x : I(x) \to G$ die maximale Lösung der Differentialgleichung $\dot{\gamma} = v(\gamma)$ zum Anfangswert $\gamma_x(0) = x$.

Zu jedem $x_0 \in G$ und $t_* \in I(x_0)$ gibt es eine Umgebung $U \subset G$ von x_0 so, dass $t_* \in I(x)$ für alle $x \in U$ (d.h. $\{t_*\} \times U \subset \Omega = \{(t, x) \,|\, t \in I(x)\}$). Das folgt aus der Offenheit von Ω, muss aber hier nicht gezeigt werden. Damit existiert also die Lösung $\gamma_x(t_*)$ für alle $x \in U$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$U \to G\,, \qquad x \mapsto \gamma_x(t_*)\,,$$

stetig ist. Man sagt, dass die Lösung stetig von den Anfangsdaten abhängt.

Hinweis: Verwenden Sie die Integraldarstellung von γ_x und das Lemma von Grönwall.

Aufgabe 51: Stetige Abhängigkeit vom Vektorfeld (25 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $v : G \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L und $w : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten nun die Differentialgleichungen

$$\dot{\gamma} = v(\gamma) \quad \text{mit} \quad \gamma(0) = x_0 \tag{1}$$
$$\dot{\alpha} = w(\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha(0) = x_0 \tag{2}$$

und nehmen an, dass eine Lösung α von (2) auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall $\tilde{I} \subset I(x_0)$ existiere. Hier bezeichnet $I(x_0)$ wie immer das Existenzintervall der eindeutigen maximalen Lösung γ von (1).

Zeigen Sie, dass dann für $t \in \tilde{I}$ gilt

$$\|\gamma(t) - \alpha(t)\| \leq |\tilde{I}|\, \|v - w\|_\infty \, \mathrm{e}^{Lt}\,,$$

die Lösungen zum selben Anfangswert x_0 also zunächst nahe beieinander bleiben, wenn sich die Vektorfelder nur wenig unterscheiden. *Hinweis*: Lemma von Grönwall.

Aufgabe 52: Der Lösungsoperator linearer Differentialgleichungen (25 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to M(n, \mathbb{R})$ stetig. Sei $\Phi(t_0, t_1) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Propagator der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ vom Anfangszeitpunkt t_0 bis zur Zeit t_1, also $\Phi(t_0, t_1)x_0 = x(t_1)$ für die maximale Lösung von $\dot{x} = A(t)x$ mit $x(t_0) = x_0$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $t_0, t_1 \in I$ ist $\Phi(t_0, t_1)$ ein Vektorraumisomorphimus.

(b) Die Matrix $\Phi(t_0, t)$ erfüllt $\quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0, t) = A(t)\Phi(t_0, t) \quad$ mit $\quad \Phi(t_0, t_0) = E_n$.

Abgabe: Bis Freitag 25.1.2019 um 16:00 Uhr in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.