Prof. Dr. Roderich Tumulka, Julian Schmidt
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2018
22. Januar 2019

Analysis 2

Übungsblatt 13

Aufgabe 53: Potenzreihenansatz (25 Punkte)

Benutzen Sie den Ansatz $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, um alle Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gleichung $\dot{x} = -tx$ zu bestimmen. Warum konvergiert die so erhaltene Reihe für alle $t \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 54: Exponential eines Jordanblocks (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{d-2}}{(d-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad \text{für } J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \in M(d, \mathbb{C}).$$

Aufgabe 55: Die Dyson-Reihe (25 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ und $A : I \to M(n, \mathbb{R})$ stetig. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)\, x \tag{1}$$

und machen den Ansatz

$$x(t) = \left(E_n + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{j-1}} dt_j\, A(t_1) \cdots A(t_j) \right) x_0.$$

(a) Rechnen Sie nach, dass x die Differentialgleichung (1) zumindest formal löst, also indem Sie die Reihe einfach gliedweise differenzieren.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe in der Definition von $x(t)$ absolut konvergent ist für alle $t \in I$.

(c) Zeigen Sie, dass $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und, dass x tatsächlich die Differentialgleichung (1) löst.
Hinweis: Hierzu müssen Sie zeigen, dass Sie die Reihe gliedweise differenzieren dürfen. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Partialsummenfolge der abgeleiteten Reihe gleichmäßig konvergiert (vgl. Satz 7.35 aus Analysis 1).

Aufgabe 56: Variation der Konstanten (25 Punkte)

Bestimmen Sie für folgende inhomogene lineare Differentialgleichungen die Lösung jeweils zu einem beliebigen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) $\dot{x} = -\frac{x}{1+t} + e^{2t}$ für beliebiges $t_0 \in (-1, \infty)$.

(b) $\dot{x} = \tan(t)\, x + \frac{1}{\cos(t)}$ für $t_0 = 0$.

Abgabe: Bis Freitag 1.2.2019 um 16:00 Uhr in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.