

# 0 Einleitung

## 0.1 Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Im Zentrum dieses Analysis 2-Kurses steht die Differential- und Integralrechnung im  $\mathbb{R}^n$ . Dabei werden wir Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$  betrachten, oder  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Beispiele:

- Reellwertige Funktionen  $f(x_1, \dots, x_n)$  von mehreren Variablen treten häufig bei Optimierungsproblemen auf: Gesucht ist  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , bei dem  $f$  maximal (oder minimal) wird.
- Die Temperatur  $T(x)$  am Ort  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  ist eine reellwertige Funktion  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (“Skalarfeld”).
- Das elektrische Feld  $E(x)$  und das magnetische Feld  $B(x)$  sind Vektorfelder,  $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .
- Bewegt sich ein punktförmiges Objekt (“Teilchen”) durch den Raum  $\mathbb{R}^3$  und befindet sich zu jeder Zeit  $t \in \mathbb{R}$  am Ort  $x(t) \in \mathbb{R}^3$ , so ist  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine *parametrisierte Kurve* oder einfach *Kurve*. Manchmal wird stattdessen die Menge

$$\{x(t) | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

als Kurve bezeichnet; manchmal wird diese Menge auch die “Spur” der parametrisierten Kurve  $x$  genannt.

Hier ist ein Beispiel für eine parametrisierte Kurve im  $\mathbb{R}^2$ : Seien  $r, \omega > 0$ ; dann bewegt sich  $x(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$  entlang des Kreises vom Radius  $r$  um den Ursprung (der Kreis ist die Spur der Kurve), und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn mit konstanter Geschwindigkeit. Die Umlaufzeit beträgt  $2\pi/\omega$ ,  $\omega$  heißt Kreisfrequenz.

- Eine *parametrisierte Fläche* im  $\mathbb{R}^3$  ist durch eine Funktion  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben. Analog zu den Kurven bezeichnet man ihre Bildmenge  $\{\phi(u, v) | (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$  als Spur von  $\phi$ , oder als unparametrisierte Fläche.
- Nicht nur die Werte 1, 2, 3 sind für  $n$  und  $m$  von Interesse. Die Energie eines mechanischen Systems aus  $N$  Teilchen ist eine Funktion der Orte und Geschwindigkeiten aller Teilchen, also von  $6N$  Variablen. In der statistischen Mechanik analysiert man das Verhalten makroskopischer Systeme mit  $N > 10^{20}$  Teilchen.

Graphische Darstellungen:

- Kurven in  $\mathbb{R}^2$  lassen sich zeichnen, solche im  $\mathbb{R}^3$  lassen sich perspektivisch zeichnen (vorzugsweise vom Computer).

- Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist der Graph, also die Menge  $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ , eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , die sich perspektivisch zeichnen lässt.
- Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich auch durch ein *Konturdiagramm* visualisieren, in dem eine Auswahl von Niveaulinien (auch Höhenlinien oder Isohypsen genannt, bekannt von Wander- und Wetterkarten) von  $f$  eingezeichnet sind; die Niveaulinie zum Wert  $z$  ist die Menge der Punkte  $(x, y)$  mit  $f(x, y) = z$ , was in der Regel eine Kurve ist.
- Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  hat als Niveaumengen in der Regel Flächen, und zur Visualisierung von  $f$  kann es nützlich sein, einige Niveauflächen, oder zumindest Stücke davon, perspektivisch zu zeichnen.
- Ein Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lässt sich zeichnen, indem man an vielen Punkten  $x \in \mathbb{R}^2$  kleine Pfeile einzeichnet, die  $f(x)$  angeben.

## 0.2 Abstand

Aus dem Satz von Pythagoras ergibt sich, dass der Abstand zwischen den Punkten  $(x_1, x_2)$  und  $(x'_1, x'_2)$  in der Ebene (bei Benutzung eines Cartesischen Koordinatensystems)

$$d(x, x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2} \quad (1)$$

beträgt. Der Abstand zweier Punkte im Raum mit Cartesischen Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  und  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  lässt sich so erschließen: In der  $x_1x_2$ -Ebene liefert (1) den Abstand zwischen  $(x_1, x_2, 0)$  und  $(x'_1, x'_2, 0)$ , und in der Ebene, die die Parallelen zur  $x_3$ -Achse durch diese beiden Punkte enthält, liefert der Satz von Pythagoras, dass

$$d(x, x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}. \quad (2)$$

Im 4-dimensionalen Raum, den wir uns nicht mehr anschaulich vorstellen können, kann man aber aus der Annahme, dass jeder 2- oder 3-dimensionale affine Unterraum dieselbe Geometrie wie der 2- oder 3-dimensionale Anschauungsraum (der "Euklidische Raum") hat, schließen, dass der Abstand zwischen  $(x_1, x_2, x_3, 0)$  und  $(x'_1, x'_2, x'_3, 0)$  durch (2) gegeben ist, und nochmal in der affinen Ebene, die die Parallelen zur  $x_4$ -Achse durch diese beiden Punkte enthält, den Satz von Pythagoras anwenden, mit dem Ergebnis, dass der Abstand zwischen  $x = (x_1, \dots, x_4)$  und  $x' = (x'_1, \dots, x'_4)$

$$d(x, x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2} \quad (3)$$

beträgt. Dies lässt sich in höhere Dimensionen fortführen, so dass allgemein der Abstand zwischen  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  im  $\mathbb{R}^n$

$$d(x, x') = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \right)^{1/2} \quad (4)$$

beträgt. Wir schreiben auch

$$\|x\| := \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

für den Abstand von  $x$  zum Ursprung, genannt die *Norm* von  $x$ . Es folgt, dass

$$d(x, x') = \|x - x'\|. \quad (6)$$

Naheliegenderweise definiert man den Abstand zweier nichtleerer Teilmengen  $A, B$  des  $\mathbb{R}^n$  als

$$d(A, B) = \inf\{d(x, x') \mid x \in A, x' \in B\}. \quad (7)$$

Zur Erinnerung: Jede nichtleere Menge reeller Zahlen, die nach unten beschränkt ist, besitzt ein Infimum in  $\mathbb{R}$ . Die Menge auf der rechten Seite von (7) ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , nichtleer weil  $A, B$  nicht leer sind, und ist nach unten beschränkt, weil stets  $d(x, x') \geq 0$ . Also existiert das Infimum stets. Ist  $A \cap B \neq \emptyset$ , dann ist  $d(A, B) = 0$ . Beispiel: Abstand eines Punktes von einer Geraden.  $d(\{x\}, \{x'\}) = d(x, x')$ .

So ähnlich definiert man den *Durchmesser*  $\text{diam}(A)$  einer nichtleeren Teilmenge  $A$  des  $\mathbb{R}^n$ :

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, x') \mid x, x' \in A\}. \quad (8)$$

Die Menge auf der rechten Seite ist nichtleer, weil  $A$  nicht leer ist, aber sie ist nicht unbedingt nach oben beschränkt. Wenn sie es nicht ist, setzt man das Supremum  $= \infty$ , so dass das Supremum immer in  $“[0, \infty]” = [0, \infty) \cup \{\infty\}$  existiert.

Geometrische Bedeutung des Skalarproduktes: Im  $\mathbb{R}^n$  definiert man das *Skalarprodukt* oder *inneres Produkt* oder *Punktprodukt* durch

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (9)$$

### 0.3 Besondere Arten von Funktionen

Beispiele für Funktionen in mehreren Variablen wie  $f(x, y)$  sind leicht zu erfinden:

$$\frac{x}{y}, \quad \frac{\sin(x+y)}{\cos(xy)}, \quad \sqrt{x^3 + e^{4x+5y}}. \quad (10)$$

Ein *Polynom* in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  sind alle Ausdrücke, die man durch Addition und Multiplikation aus  $x_1, \dots, x_n$  und Konstanten bilden kann, also endliche Summen von Ausdrücken der Form

$$c x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine Konstante ist und jedes  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Der *Grad* dieses Ausdrucks ist  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$  (also hat  $x^3 y^4$  den Grad 7), und der Grad des Polynoms ist der höchste auftretende Grad. Ein Polynom heißt *homogen*, falls alle Terme denselben Grad haben.

Die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *permutations-symmetrisch*, falls gilt

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (11)$$

für alle Permutationen  $\sigma \in S_n$  und alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Zum Beispiel ist  $\sin(x+y)/\cos(xy)$  permutations-symmetrisch, aber  $x/y$  nicht.

Die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *rotations-symmetrisch*, falls es eine Funktion  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$f(x) = g(\|x\|) \quad (12)$$

(“ $f$  hängt von  $x$  nur durch  $\|x\|$  ab”).

Die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *gerade*, falls stets  $f(-x) = f(x)$ , und *ungerade*, falls stets  $f(-x) = -f(x)$ .

Wenn  $h$  und  $k$  Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind, so kann man  $f(x, y) = h(x) + k(y)$  bilden und  $g(x, y) = h(x)k(y)$ ; aber nur die wenigsten Funktionen von zwei Variablen sind von dieser Form! Dies lässt sich dadurch veranschaulichen, dass man Variablen  $x, y$  betrachtet, die nicht ganz  $\mathbb{R}$  durchlaufen, sondern nur eine endliche Menge  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Dann ist eine Funktion  $f(x, y)$  nichts als eine  $N \times N$ -Matrix. Der Raum aller  $N \times N$ -Matrizen ist  $N^2$ -dimensional, während die Teilmenge der Matrizen der Form  $h(x) + k(y)$  höchstens Dimension  $2N$  haben kann, weil man ja nur die  $2N$  Werte  $h(x)$  und  $k(y)$  wählen kann; tatsächlich hat sie nur Dimension  $2N - 1$ , weil man eine Konstante von  $h$  subtrahieren und zu  $k$  addieren kann, ohne  $f$  zu ändern. Ebenso für  $h(x)k(y)$ .

## 0.4 Ableitung im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten eine (parametrisierte) Kurve  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Die offensichtliche Definition für ihre Ableitung lautet

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}, \quad (13)$$

falls dieser Limes existiert. Das verdeutlicht den Bedarf für das Konzept eines Limes in  $\mathbb{R}^n$ , was wir in Kapitel 1 besprechen werden.

Die physikalische Bedeutung von  $\frac{dx}{dt}$ , wenn  $t$  die Zeit bedeutet und  $x(t)$  den Ort eines Teilchens zur Zeit  $t$ , ist die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  (aufgefasst als Vektor). Falls  $dx/dt \neq 0$ , so hat  $dx/dt$  eine Richtung, und die ist tangential an die Kurve in  $x(t_0)$ . Insbesondere ist die Tangente an die Kurve  $x$  im Punkt  $x(t_0)$  die Gerade

$$\left\{ x(t_0) + s \frac{dx}{dt}(t_0) \mid s \in \mathbb{R} \right\}. \quad (14)$$

Hier ist eine vorläufige Definition des Limes von Vektoren: Eine Folge  $(\underline{x}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  (Unterstreichungen kennzeichnen Vektoren) in  $\mathbb{R}^n$  konvergiert gegen  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  genau dann,

wenn jede Komponente  $x_{mi}$  von  $\underline{x}_m = (x_{m1}, \dots, x_{mn})$  gegen  $x_i$  konvergiert ( $i = 1, \dots, n$ ). Daraus folgt für (13), dass

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \left( \frac{dx_1}{dt}(t_0), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t_0) \right) \quad (15)$$

und genau dann existiert, wenn alle Komponentenfunktionen  $x_i(t)$  bei  $t_0$  differenzierbar sind.

Auf eine andere Art von Ableitung werden wir geführt, wenn wir eine reellwertige Funktion  $f(x, y)$  von mehreren Variablen maximieren wollen. Angenommen, sie sei bei  $(x_0, y_0)$  maximal. Dann gilt für die Funktion  $g(x) := f(x, y_0)$ , also die Funktion  $f$  nach dem Einsetzen der Konstante  $y_0$  für die Variable  $y$ , dass sie bei  $x_0$  maximal ist. Falls  $g$  bei  $x_0$  differenzierbar ist, dann wissen wir, dass  $g'(x_0) = 0$ . Diese Ableitung nennt man die *partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$  am Punkt  $(x_0, y_0)$* :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad (16)$$

falls dieser Limes existiert. In dem Fall sagt man,  $f$  sei in  $(x_0, y_0)$  partiell nach  $x$  differenzierbar. Falls die partielle Ableitung nach  $x$  überall existiert, kann man sie als Funktion von  $(x_0, y_0)$  betrachten (wofür man praktischerweise einfach  $(x, y)$  schreibt) und nennt diese Funktion die *partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$* .

Analog ist  $\frac{\partial f}{\partial y}$  definiert. Den Vektor

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \quad (17)$$

nennt man den *Gradienten* von  $f$ . Als Funktion von  $(x_0, y_0)$  aufgefasst, bildet er ein Vektorfeld in  $\mathbb{R}^2$ .

Die praktische Berechnung von  $\partial f / \partial x$ , wenn eine Formel für  $f$  (wie etwa in (10)) gegeben ist, ist sehr einfach: Man stelle sich vor,  $y$  sei eine Konstante, und betrachte den Ausdruck als eine Funktion von  $x$ ; dann berechne man die Ableitung. Also z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{y} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin(x+y)}{\cos(xy)} = \frac{\cos(x+y)\cos(xy) - \sin(x+y)(-1)\sin(xy)y}{\cos^2(xy)}.$$

Es gilt also an einem Maximum  $(x_0, y_0)$  von  $f$ , dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \quad (18)$$

sofern die partiellen Ableitungen existieren; denn die erste Gleichung bedeutet  $g'(x_0) = 0$ , und die zweite ergibt sich aus derselben Überlegung für  $h(y) := f(x_0, y)$ . Das erlaubt uns oft, die Suche nach dem Maximum auf wenige Punkte  $(x_0, y_0)$  einzuengen.

Für Funktionen  $g(x)$  von einer Variablen kennen wir das Kriterium der zweiten Ableitung, das uns Information darüber liefert, ob an einer Stelle  $x_0$  mit  $g'(x_0) = 0$  ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt. Wir werden ein analoges Kriterium für Funktionen von mehreren Variablen kennenlernen.

Höhere Ableitungen kann man nun auch bilden. Leitet man  $f(x_1, \dots, x_n)$  zuerst partiell nach  $x_j$  ab und dann nach  $x_i$ , so schreibt man dafür

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Wenn  $i = j$ , so schreibt man statt  $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_i$  lieber  $\partial^2 f / \partial x_i^2$ . Es gibt also  $n$  partielle erste Ableitungen und  $n^2$  zweite. Aus Übungsaufgabe 9c von Blatt 2 ergibt sich, dass für Polynome  $p$  gilt:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}, \quad (19)$$

das heißt, die Operatoren  $\partial / \partial x_i$  und  $\partial / \partial x_j$  vertauschen. Es bleibt noch zu untersuchen, ob dies auch für Funktionen  $f$  gilt, die keine Polynome sind, oder unter welchen Voraussetzungen an  $f$  es gilt. Das werden wir in Kapitel 4 tun.

Die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  lässt sich auch so auffassen: Bewegt sich ein Teilchen in  $x$ -Richtung mit Geschwindigkeit 1 und  $y$ -Wert  $y_0$ , und passiert es den Punkt  $(x_0, y_0)$  zur Zeit  $t = 0$ , lautet die parametrisierte Kurve also  $\underline{x}(t) = (x_0 + t, y_0)$ , dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} \left( f(\underline{x}(t)) \right)_{t=0}. \quad (20)$$

Das heißt, die partielle  $x$ -Ableitung ist die Ableitung bei Bewegung in  $x$ -Richtung. Entsprechend können wir für jede Richtung die Richtungsableitung definieren: Sei  $0 \neq \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ . Die Richtungsableitung in Richtung  $\underline{v}$  im Punkt  $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$  ist

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} \left( f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) \right)_{t=0}. \quad (21)$$

Wie wir in einer Übungsaufgabe nachweisen werden, gilt für Polynome  $p(x, y)$  ein einfacher Zusammenhang für die Abhängigkeit der Richtungsableitung von der Richtung  $\underline{v} = (v_x, v_y)$ :

$$\frac{\partial p}{\partial \underline{v}} = v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (22)$$

Auch hier bleibt zu untersuchen, ob diese einfache Regel auch für andere Funktionen als Polynome gilt, und auch das werden wir in Kapitel 4 tun.

## 0.5 Kurvenlänge

Sei  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve; wir wollen ihre Länge  $L(x)$  definieren. Dazu unterteilen wir das Intervall  $[a, b]$  mit  $N - 1$  Stützpunkten gemäß  $a =: t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N := b$ . Sei  $U_N$  die Menge aller solchen Tupel  $(t_0, t_1, \dots, t_N)$ , und

$$U = \bigcup_{N=1}^{\infty} U_N. \quad (23)$$

Die Definition basiert auf folgender Motivation: Erstens verbindet die Einschränkung von  $x$  auf  $[t_{i-1}, t_i]$  den Punkt  $x(t_{i-1})$  mit  $x(t_i)$ ; zweitens erwarten wir, dass  $L(x)$  die Summe der Längen dieser Teilstücke von  $x$  ist; drittens erwarten wir, dass keine Kurve, die  $x(t_{i-1})$  mit  $x(t_i)$  verbindet, kürzer sein kann als die Strecke von  $x(t_{i-1})$  nach  $x(t_i)$ , und viertens, dass deren Länge  $d(x(t_{i-1}), x(t_i))$  ist. Daraus ergibt sich insgesamt, dass

$$L(x) \geq \sum_{i=1}^N d(x(t_{i-1}), x(t_i)). \quad (24)$$

### 0.1 Definition.

$$L(x) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^N d(x(t_{i-1}), x(t_i)) \mid (t_0, \dots, t_N) \in U \right\}. \quad (25)$$

Ich berichte, dass man folgendes beweisen kann:

**0.2 Satz.** Sei  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine derartige Kurve, dass jede Komponentenfunktion  $x_i$  stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$L(x) = \int_a^b \left\| \frac{dx}{dt} \right\| dt. \quad (26)$$

## 0.6 Flächenintegrale

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir werden Integrale der Form

$$\int_D f(\underline{x}) d\underline{x} \quad (27)$$

so definieren, dass sie das signierte Volumen der Menge zwischen dem Graphen von  $f$  und  $D$  liefern. Hierbei repräsentiert  $d\underline{x}$  den Flächeninhalt eines infinitesimalen Stückes von  $D$ . Man schreibt daher auch  $d^2\underline{x}$  oder  $dA$  statt  $d\underline{x}$  und spricht von einem Flächenintegral. Es folgt, dass der Mittelwert der Funktion  $f$  ausgedrückt werden kann als

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{area}(D)} \int_D f(\underline{x}) d\underline{x}, \quad (28)$$

wobei  $\text{area}(D)$  den Flächeninhalt von  $D$  bedeutet. Analog dazu kann man Volumenintegrale in  $\mathbb{R}^3$  und in  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 3$  betrachten. Es bleibt zu besprechen, wie diese Integrale exakt zu definieren sind, was für Rechenregeln gelten, und wie man sie praktisch berechnet.

## 0.7 Polarkoordinaten

In der Linearen Algebra haben wir verschiedene Basen in einem Vektorraum  $V$  betrachtet; diese definieren verschiedene Koordinatensysteme (Bijektionen  $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ). Allgemeiner will man auch *krummlinige Koordinatensysteme* betrachten. Das grundlegende Beispiel hierfür sind *Polarkoordinaten* im  $\mathbb{R}^2$ , die darin bestehen, dass man einen Punkt  $P$  in der Ebene durch 2 Zahlen charakterisiert, aber nicht durch seine  $x$ - und  $y$ -Koordinate, sondern durch den Abstand  $r$  vom Ursprung und den Winkel  $\varphi$  zur  $x$ -Achse. Folgende Gleichungen erlauben die Berechnung der Cartesischen Koordinaten aus den Polarkoordinaten (Konversion):

$$x = r \cos \varphi \quad (29a)$$

$$y = r \sin \varphi. \quad (29b)$$

Dabei erlaubt man  $r \in [0, \infty)$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Für  $r = 0$  liefert jedes  $\varphi$  den Ursprung, daher hat der Ursprung keinen definierten Wert von  $\varphi$ . Die umgekehrte Konversion lautet

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (30a)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x, y > 0 \\ \pi/2 & \text{falls } x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x < 0 \\ -\pi/2 & \text{falls } x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x > 0, y < 0. \end{cases} \quad (30b)$$

Die *Koordinatenlinien* sind die Kurven, entlang derer eine Koordinate konstant ist. Konstantes  $r$  liefert Kreise um den Ursprung, konstantes  $\varphi$  Strahlen (Halbgeraden), die am Ursprung beginnen. Es ist oft nützlich, am Punkt  $\underline{x} \neq 0$  den Einheitsvektoren in Richtung wachsender  $r$ - und  $\varphi$ -Koordinate Namen zu geben:

$$\underline{e}_r = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}, \quad \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{e}_r. \quad (31)$$

Wir werden an verschiedenen Stellen im Laufe des Semesters Berechnungen in Polarkoordinaten durchführen; insbesondere werden wir Flächenintegrale in Polarkoordinaten ausdrücken.