Prof. Dr. R. Tumulka, Julian Schmidt
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2018/19
18.12.2018

Erste Übungsklausur zur Analysis 2

Informationen zur Klausur: Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei der Klausur/dem Test nicht erlaubt. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass bei der Klausur/dem Test Abschreiben und unerlaubte Kommunikation mit anderen Personen Verletzungen der akademischen Integrität darstellen und schwerwiegende Konsequenzen haben können. Der Stoff der ersten Teilklausur/des ersten Teiltests ist Kapitel 1–5 aus dem Skript und die Übungsblätter 1–7. Alle Fakten, die in der Vorlesung oder dem Repetitorium erwähnt oder in den Übungen bewiesen wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden. Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen. Streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Sie können die Aufgaben zu Hause lösen; sie werden nicht korrigiert. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur. Die erreichbaren Punktzahlen addieren sich auf 100. Es ist vorgesehen, dass Sie keine Bücher, Notizen oder elektronische Hilfsmittel benutzen. Die Aufgaben werden im Repetitorium am 9.1.2019 besprochen.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (12 Punkte)

Kreuzen Sie $\boxed{\text{W}}$ an, wenn die Aussage wahr ist und $\boxed{\text{F}}$, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 2 Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -2 Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Beliebige Schnitte offener Mengen sind offen.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Konvergiert (f_n) punktweise, dann konvergiert (f_n) gleichmäßig.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Konvergiert (f_n) gleichmäßig, dann ist die Grenzfunktion stetig.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Vereinigung zweier konvexer Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist konvex.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Euklidische Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine konvexe Funktion.

Aufgabe 2: Definition (4 Punkte)

Formulieren Sie die Definition von *total differenzierbar*: Die Funktion $f(x,y)$ ist im Punkt (x_0, y_0) genau dann total differenzierbar, wenn

---

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei

$$f(x,y,u,v) = \frac{x^2 + e^y v}{3y^2 + \ln(2+u^2)}\,.$$

Wie sieht man am schnellsten, dass $f_{uvxyvu}(x,y,u,v) = 0$ für alle (x,y,u,v)?

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Seien $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $\boldsymbol{F} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Formulieren und beweisen Sie Produktregeln für $\operatorname{div}(f\boldsymbol{F})$ und $\operatorname{rot}(f\boldsymbol{F})$, ausgedrückt durch ∇f, $\operatorname{div}(\boldsymbol{F})$ und $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F})$.

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades von $f(x,y) = e^{-x^2+2xy}$ im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 6: (8 Punkte)

Im $\mathbb{R}^n$ seien k Punkte $a_1, \ldots, a_k$ gegeben, und $\|\cdot\|$ bezeichne die Euklidische Norm. Zeigen Sie, dass die Summe der Abstandsquadrate $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \|x - a_j\|^2\,,$$

ein globales Minimum im Schwerpunkt $\xi := \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j$ besitzt.

Aufgabe 7: (8 Punkte)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3 + 2y^3 - xy\,.$$

Aufgabe 8: (12 Punkte)

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Mengen $A = \{(t, 1+t^2) | t \in \mathbb{R}\}$ und $B = \{(1+t, t) | t \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 9: (6 Punkte)

Sei $f(x, y) = (5x^2 - 2y^2)/(7x^2 + 3y^2)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Existiert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 10: (4 Punkte)

Welche dieser Formeln gibt die Länge der Kurve $\boldsymbol{r}(t)$ mit $a \le t \le b$ wieder? Nur eine Antwort ist richtig.

☐ $\int_a^b \lVert \boldsymbol{r}'(t) \rVert^2 \, dt$	☐ $\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\lVert \boldsymbol{r}(t) \rVert^2 \right) dt$	☐ $\int_a^b \lVert \boldsymbol{r}'(t) \rVert \, dt$
☐ $\int_a^b \lVert \boldsymbol{r}(t) \rVert^2 \, dt$	☐ $\int_a^b \frac{\lVert \boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) \rVert}{\lVert \boldsymbol{r}'(t) \rVert^3} \, dt$	☐ $\int_a^b \lVert \boldsymbol{r}(t) \rVert \, dt$

Aufgabe 11: (12 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf partielle und totale Differenzierbarkeit in $(0, 0)$.

Aufgabe 12: Beweis (16 Punkte)

Zeigen Sie für alle nichtleeren Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \le d(A, B) + \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) \, .$$