Prof. Dr. R. Tumulka, Julian Schmidt
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2018/19
29.1.2019

Zweite Übungsklausur zur Analysis 2

Informationen zur Klausur: Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei der Klausur/dem Test nicht erlaubt. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass bei der Klausur/dem Test Abschreiben und unerlaubte Kommunikation mit anderen Personen Verletzungen der akademischen Integrität darstellen und schwerwiegende Konsequenzen haben können. Den Stoff der zweiten Teilklausur/des zweiten Teiltests bilden Kapitel 6 und 8–10 aus dem Skript und die Übungsblätter 8–13; natürlich kann auch Hintergrundwissen aus der ersten Semesterhälfte relevant sein. Alle Fakten, die in der Vorlesung oder dem Repetitorium erwähnt oder in den Übungen bewiesen wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden. Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Sie können die Aufgaben zu Hause lösen; sie werden nicht korrigiert. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur. Es ist vorgesehen, dass Sie keine Bücher, Notizen oder elektronische Hilfsmittel benutzen. Die Aufgaben werden im Repetitorium am 6.2.2019 besprochen.

Aufgabe 1: Definition

Formulieren Sie die Definition von *Diffeomorphismus*: Seien $G, D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : G \to D$ ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn

---

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Tangentialebene an die Fläche $x^5 + y^5 + z^5 = 8$ im Punkt $P = (a, b, c)$ durch die Gleichung

$$a^4 x + b^4 y + c^4 z = 8$$

gegeben ist.

Aufgabe 3: Warum besitzt die Funktion $f(x, y, z) = x + 3yz$ Maximum und Minimum auf der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$? Benutzen Sie Lagrange-Multiplikatoren, um diese Maximal- und Minimal-Werte zu finden.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Gleichung $x^{(6)} - \ddot{x} = 0$.

Aufgabe 5: Benutzen Sie die Methode der Variation der Konstanten, um die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = t^{-2}e^{-2t} \qquad\qquad (t > 0)$$

zu finden.

Aufgabe 6: Sei $I = \int_0^2 \int_{x^2}^5 xy\, dy\, dx$.

(a) Berechnen Sie I.

(b) Zeichnen Sie das Integrationsgebiet im $\mathbb{R}^2$.

(c) Schreiben Sie I als Summe eines oder mehrerer $dx\, dy$-Integrale. Sie brauchen diese Integrale nicht auszuwerten.

Aufgabe 7: Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Region $D \subset \mathbb{R}^2$, die eingeschlossen wird vom Einheitskreis und den zwei Radien, die symmetrisch bei den Winkeln $\pm\theta$ von der y-Achse liegen.

Aufgabe 8: Sei W die Region in $\mathbb{R}^3$, die durch die Bedingungen $0 < z$ und $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ definiert wird. Die Funktion f sei auf W gegeben durch $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Skizzieren Sie W. Wie heißt diese Form?

(b) Drücken Sie W in Kugelkoordinaten aus.

(c) Drücken Sie f in Kugelkoordinaten als $\tilde{f}(\rho, \theta, \varphi)$ aus.

(d) Berechnen Sie $\int_W f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 9: Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos 3t, t^2)$, das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ (auch geschrieben als $\int_\gamma v \cdot ds$). Hinweis: Manche Lösungswege sind leichter als andere.

Aufgabe 10: Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der Transformation $\Phi(u, v) = (ue^v, ve^u)$. (Sie brauchen kein Integral zu lösen.)

Aufgabe 11: Für beliebige $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ hat die Gleichung

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

mindestens eine reelle Lösung (kein Beweis erforderlich). Sei $g(\alpha, \beta, \gamma)$ die kleinste reelle Lösung. Zum Beispiel ist $g(0, 0, 1) = -1$ (kein Beweis erforderlich). Zeigen Sie, dass g in einer Umgebung von $(0, 0, 1)$ stetig differenzierbar ist, und dass $\nabla g(0, 0, 1) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.