Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 18/19

Mathematatik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 3 (Abgabe am 02.11.2018)

Aufgabe 12 (15 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}8^{\nu}$ b) $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}8^{k}$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{\ell}{\nu}8^{\nu}$

Aufgabe 13 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie α so, dass

$$\nu\binom{n}{\nu}=\alpha\binom{n-1}{\nu-1} \qquad \forall\, n,\nu\in\mathbb{N}\,.$$

Gilt die Beziehung auch für $n\in\mathbb{R}$?

b) Berechnen Sie für $p\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu\binom{n}{\nu}p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}\,.$$

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$3^n>n^3 \quad \forall\, n>3\,.$$

Aufgabe 15 (keine Abgabe)

Seien f, g und h Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f(x)=x^2-1\,, \qquad g(x)=\sqrt{x+8} \qquad \text{und} \qquad h(x)=x^3+1\,.$$

a) Bestimmen Sie für f, g und h jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie das Bild (als Teilmengen von $\mathbb{R}$).

b) Existieren die folgenden Verkettungen? (Die Definitionsbereiche aus Teil (a) gelten weiterhin.) Geben Sie ggf. den Definitionsbereich und das Bild der jeweiligen Verknüpfung an.

(i) $f\circ g$ (ii) $g\circ f$ (iii) $f\circ h$
(iv) $h\circ f$ (v) $g\circ h$ (vi) $h\circ g$

c) Bestimmen Sie $(h\circ f)(x)-(f\circ h)(x)$.

Aufgabe 16 (10 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 25.11.18 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Finite geometric series*,
- *Finite geometric series word problems*,
- *Finite geometric series in sigma notation*,
- *Arithmetic series* und
- *Arithmetic series in sigma notation*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).

Aufgabe 17 (keine Abgabe)

Das Pascalsche Dreieck baut man wie folgt aus den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ auf:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Dabei wächst also n nach unten und k nach rechts hin. Die Beziehung

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

aus der Vorlesung sagt uns, dass am linken und rechten Rand ausschließlich Einsen stehen. Weiter folgt aus der Funktionalgleichung (Eigenschaft (iv) aus der Vorlesung), dass sich alle anderen Einträge jeweils als Summe der beiden rechts und links darüberstehenden ergeben.

a) Konstruieren Sie auf diese Weise die ersten 10 Zeilen des Pascalschen Dreiecks!

b) Was bedeutet die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

aus der Vorlesung am Pascalschen Dreieck?

c) Wie lässt sich die Spiegelsymmetrie des Pascalschen Dreiecks als Beziehung (Formel) zwischen Binomialkoeffizienten ausdrücken?