

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 16.11.2018)

---

### Aufgabe 24

(16 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a)  $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$     b)  $f(x) = x|x|$     c)  $f(x) = |x^4 - x^2|$     d)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

### Aufgabe 25

(9 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x+18}{27+x^3}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{18} - 1024x^8}{8 - x^3}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^k - 1}$  für  $n, k \in \mathbb{N}$

### Aufgabe 26

(keine Abgabe)

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten im Folgenden stets die Asymptotik für  $x \rightarrow x_0$ . Sei weiter  $f(x) = o((x - x_0)^n)$  und  $g(x) = o((x - x_0)^m)$  mit  $n, m \in \mathbb{N}_0$ .

a) Zeigen Sie:<sup>1</sup>

$$f(x)g(x) = o((x - x_0)^{n+m}).$$

Dafür schreiben wir kurz  $o((x - x_0)^n) o((x - x_0)^m) = o((x - x_0)^{n+m})$ .

b) Zeigen Sie<sup>2</sup>

$$f(x) + g(x) = o((x - x_0)^{\min(n,m)}).$$

Dafür schreiben wir kurz  $o((x - x_0)^n) + o((x - x_0)^m) = o((x - x_0)^{\min(n,m)})$ .

### Aufgabe 27

(5 Punkte)

Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von Klein-o (Lemma 4).

---

<sup>1</sup>Denken Sie daran, wie wir in der Vorlesung gezeigt haben, dass  $x^m o(x^n) = o(x^{n+m})$ ,  $x \rightarrow 0$ , was die Kurzschreibweise der folgenden Äquivalenz ist,

$$f(x) = o(x^n) \Leftrightarrow x^m f(x) = o(x^{n+m}), \quad x \rightarrow 0.$$

<sup>2</sup>Dabei ist  $\min(x_1, x_2, \dots, x_N)$  die kleinste der Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , d.h. z.B. ist  $\min(2, 0, 1, 3) = 0$ .

**Aufgabe 28**

(10 Punkte)

Wie Sie wissen gilt beim Ableiten die Produktregel  $(fg)' = f'g + fg'$ . Zeigen Sie für  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x) g^{(n-\nu)}(x).$$

ZUR ERINNERUNG:  $f^{(k)}(x)$  ist die  $k$ te Ableitung der Funktion  $f(x)$  nach  $x$ , d.h.  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$  etc.

HINWEIS: Führen Sie eine vollständige Induktion nach  $n$  durch, und werfen Sie einen Blick auf den Beweis der Binomischen Formel (Satz 1).

**Aufgabe 29**

(10 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 09.12.18 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die *Skills*

- *Derivative & the direction of a function,*
- *Visualizing derivatives,*
- *Differentiate polynomials,*
- *Tangents of polynomials* und
- *Basic differentiation rules: table.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).