

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 23.11.2018)

---

### Aufgabe 30

(9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n+18}\right)^n \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{n-18} \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{18-n}\right)^{2n}$$

### Aufgabe 31

(10 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen *Sinus Hyperbolicus*, *Kosinus Hyperbolicus* und *Tangens Hyperbolicus* sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

- Für welche  $x \in \mathbb{R}$  sind die Funktionen definiert?
- Bestimmen Sie jeweils den Limes für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$ .
- Zeigen Sie:  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .

### Aufgabe 32

(10 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

$$\text{a) } \sinh x, \quad \text{b) } \cosh x \quad \text{und} \quad \text{c) } \tanh x$$

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun die Graphen von  $\sinh$ ,  $\cosh$  und  $\tanh$ . Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie größtmögliche Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

### Aufgabe 33

(keine Abgabe)

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname  $\text{Arsinh}$ , d.h.  $\text{Arsinh}(\sinh(x)) = x$ , analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

$$\text{a) } \text{Arsinh } x, \quad \text{b) } \text{Arcosh } x \quad \text{und} \quad \text{c) } \text{Artanh } x$$

an. Bei (a) und (c) ist dies eindeutig – bei (b) sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorlesungsbeispiel  $f(x) = x^2$  mit Umkehrfunktionen von  $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  und von  $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^-$ .

### Aufgabe 34

(9 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 6 die Ableitungen von

$$\text{a) } \text{Arsinh } x, \quad \text{b) } \text{Arcosh } x \quad \text{und} \quad \text{c) } \text{Artanh } x.$$

BEMERKUNG: Sie benötigen dazu keine expliziten Darstellungen der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 32.

### Aufgabe 35

(10 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 13.01.19 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die *Skills*

- *Evaluate inverse functions,*
- *Find inverse functions,*
- *Use the properties of logarithms,*
- *Evaluate logarithms (advanced)* und
- *Properties of exponents (rational exponents).*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).