Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 18/19

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 30.11.2018)

Aufgabe 36 (9 Punkte)
Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie dort die Ableitung.

$$f_1(x) = \big(\log(x^3)\big)^2\,, \qquad f_2(x) = \log_{18}(x)\,, \qquad f_3(x) := x^x\,.$$

Aufgabe 37 (6 Punkte)
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$. Hinweis: Die Regel von l'Hospital ist hilfreich.

Aufgabe 38 (3+4 = 7 Punkte)

a) Sei $f(x) = (18)^x$. Bestimmen Sie $f'(x)$.

b) Seien $0 < p_j \leq 1$, $j = 1, \ldots, n$, mit $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$, sowie

$$S(\alpha) := \frac{1}{1-\alpha} \log\left(\sum_{j=1}^{n} {p_j}^{\alpha}\right)$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{\alpha\to 1} S(\alpha)$. Hinweis: Denken Sie an die l'Hospitalsche Regel.

Aufgabe 39 (keine Abgabe)
Sei

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}\,.$$

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit (i) $f(x) = 1$, (ii) $f(x) = -1$ und (iii) $f(x) = 0$.

b) Skizzieren Sie den Graph von f.

c) Ist f in Null stetig? Argumentieren Sie mit ε und δ, und verwenden Sie dabei Ihre Ergebnisse aus Teil a.

Aufgabe 40 (16 Punkte)
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} \quad \forall\ |x| < 1\,.$$

Bestimmen Sie *damit* die Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{1}{18+x}$ b) $\dfrac{1}{1-x^5}$ c) $\dfrac{x^{18}}{1+x^2}$ d) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

Hinweis: Sie müssen (und sollen) keine Ableitungen berechnen.

Aufgabe 41 (8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 13.01.19 auf `www.khanacademy.org` die *Skill*

- *Limits using trig identities*,
- *Limits at infinity of quotients with trig*,
- *Infinite geometric series* und
- *Function as a geometric series*.

HINWEISE: (i) Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).

(ii) $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}\,, \quad \csc(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}\,, \quad \cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}\,.$