Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 14.12.2018)

Aufgabe 48 (10 Punkte)

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) = \frac{\mathrm{e}^{ax^2}\cos(x)}{1 - bx^4}$$

bei Null ein Maximum, für welche ein Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 49 (10 Punkte)

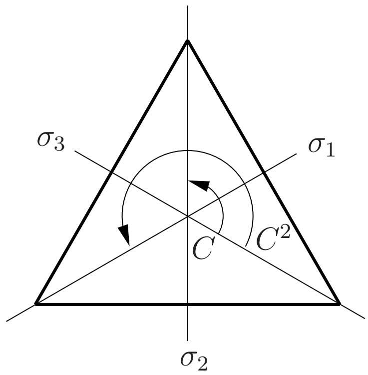
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|(x-2) + 2}{|x|}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den (maximalen) Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und zeichnen Sie die den Graph der Funktion.

Aufgabe 50 (keine Abgabe)

Wir betrachten die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Bezeichnen Sie die Spiegelungen an den Seitenhalbierenden mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die 120°-Drehung um den Mittelpunkt mit C und die 240°-Drehung um den Mittelpunkt mit C^2 (wieso?). Bestimmen Sie die Gruppentafel. Dokumentieren Sie, wie Sie zu Ihrem Ergebnis gekommen sind. Ist die Gruppe abelsch?



Hinweis: Gehen Sie analog zum Vorlesungsbeispiel vor, in dem wir die Symmetriegruppe eines Rechtecks diskutiert haben.

Aufgabe 51 (5+10=15 Punkte)

a) Zeigen Sie: Die Menge der bijektiven Abbildungen $[0,1] \to [0,1]$ bildet bezüglich der Komposition (also $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \ \forall\, x \in [0,1]$) eine Gruppe. Ist diese Gruppe abelsch?

b) Sei $G = \{e, a, b, c\}$ und seien $(G, \circ)$ sowie $(G, \odot)$ Gruppen mit neutralem Element e. Weiter gelte $a \circ b = e$ sowie $a \odot a = b \odot b = e$. Konstruieren Sie die Gruppentafeln für $(G, \circ)$ und $(G, \odot)$, und berechnen Sie $(a \circ b \circ c)^{-1}$ sowie $(a \odot b \odot c)^{-1}$. Sind die Gruppen abelsch?

Aufgabe 52 (keine Abgabe)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K?[3]

a) $M = \mathbb{C}^3$, $K = \mathbb{R}$ b) $M = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{C}$ c) $M = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$,

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = 18x_1\,,\ x_1 - x_2 = x_3 \right\}$, $K = \mathbb{R}$

e) $M = \{$Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten und Steigung 18 im Ursprung$\}$, $K = \mathbb{R}$

f) $M = \{$Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten und einer Nullstelle bei 18$\}$, $K = \mathbb{R}$

[3] Überlegen Sie nur, ob aus $\vec{x}, \vec{y} \in M$ folgt, dass auch $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in M \ \forall\ \lambda, \mu \in K$. Die Rechenregeln bekommen wir geschenkt. (Warum?)