

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 21.12.2018)

---

### Aufgabe 53<sup>1</sup>

(8 Zusatzpunkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  linear unabhängig sind, und stellen Sie – falls möglich – den Vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  als Linearkombination dieser Vektoren dar.

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

### Aufgabe 54

(10 Punkte)

Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  linear abhängig?

a)  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ .

### Aufgabe 55

(10 Punkte)

Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$ , genannt  $C([a, b])$ , ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Für  $x \in [-\pi, \pi]$  sei  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = \sin x$ ,  $f_3(x) = \cos x$  und  $f_4(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$ . Zeigen Sie:

- a)  $f_1, f_3, f_4$  sind linear abhängig in  $C([-\pi, \pi])$ .  
b)  $f_1, f_2, f_3$  sind linear unabhängig in  $C([-\pi, \pi])$ .

### Aufgabe 56<sup>1</sup>

(keine Abgabe)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $x_1 + x_2 + x_3 = -1$	b) $7x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0$	c) $7x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 17$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$	$x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0$	$x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -3$
$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 5$	$3x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 0$	$3x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -1$

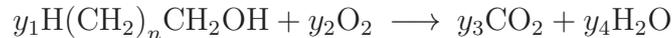
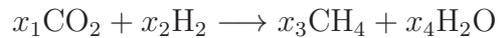
---

<sup>1</sup>Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.

**Aufgabe 57**

(10 Punkte)

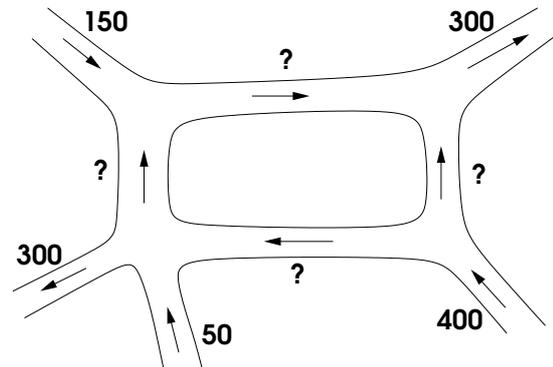
Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen



(für beliebiges  $n \in \mathbb{N}_0$ ) ein lineares Gleichungssystem für die Werte  $x_i$  bzw.  $y_j$  aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle  $x_i$  bzw.  $y_j$  positive ganze Zahlen sind.

**Aufgabe 58**<sup>1</sup> (keine Abgabe)

Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



Was können Sie über die Anzahlen der Autos sagen, die die vier mit Fragezeichen markierten Straßen benutzen? Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an. Geben Sie außerdem für jede der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an.

HINWEIS: Zur besseren Vergleichbarkeit bezeichnen Sie bitte die Anzahl der Autos auf den vier Straßen im Uhrzeigersinn mit  $x_1, \dots, x_4$  beginnend mit der unteren.

**Aufgabe 59**

(9 Punkte)

Geben Sie für alle Vektorräume aus Aufgabe 52 die Dimension und eine Basis an.

**Aufgabe 60**

(8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 13.01.19 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die *Skills*

- *Graphically add & subtract vectors,*
- *Combined vector operations,*
- *Number of solutions to a system of equations algebraically* und
- *Systems of equations word problems.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).

<sup>1</sup>Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.