Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 18/19

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 11.01.2019)

Aufgabe 61 (10 Zusatzpunkte)
Sei $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = \sin x$ und $f_3(x) = \cos x$. Dann ist $V := \operatorname{span}(f_1, f_2, f_3)$ ein Unterraum von $C([-\pi, \pi])$ mit $\dim V = 3$ (vgl. Aufgabe 55). Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f'' + f$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 62 (14 Punkte)
Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2a_1b_1 + a_2b_2 + 8a_3b_3$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 - a_2b_2$

d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

e) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 - \frac{1}{2}a_1b_2 - \frac{1}{2}a_2b_1 + 2a_3b_3$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.

Aufgabe 63 (18 Punkte)
Seien

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $U = \operatorname{span}(\vec{a}_2, \vec{a}_3) \subset \mathbb{R}^3$.

a) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und die zugehörige Norm.
   (i) Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\| = |\vec{a}_j|$, $j = 1, 2, 3$
   und alle Skalarprodukte $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle = \vec{a}_j \cdot \vec{a}_k$, $j \neq k$.
   (ii) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ONB von U.

b) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 62e und die zugehörige Norm.
   (i) Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\|$, $j = 1, 2, 3$
   und alle Skalarprodukte $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle$, $j \neq k$.
   (ii) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ONB von U.

Aufgabe 64 (keine Abgabe)

Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für beliebige $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 65 (2+2+2 = 6 Zusatzpunkte)

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir betrachten das LGS

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b} \qquad \text{für } x_j \in \mathbb{R}\,,\ j = 1,2,3\,.$$

a) Bilden Sie das Kreuzprodukt mit $\vec{a}_2$ von rechts und anschießend das Skalarprodukt des Ergebnisses mit $\vec{a}_3$. Lösen Sie nun – wenn möglich – nach x_1 auf.

b) Beschaffen Sie sich analoge Lösungsformeln für x_2 und x_3.

c) Welche Bedingung müssen die $\vec{a}_j$ erfüllen, damit Sie mithilfe der Formeln aus (a) und (b) wirklich die Lösung des LGS erhalten?

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!