

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 18.01.2019)

Aufgabe 66

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte (x, y) aus \mathbb{R}^2 :

a) $(-1, \sqrt{3})$ b) $(2, 2)$ c) $(\sqrt{3}, -1)$ d) $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

Geben Sie die folgenden Punkte (x, y, z) aus \mathbb{R}^3 in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

e) $(-\pi, 0, 0)$ f) $(0, 0, 7)$ g) $(1, 0, -1)$ h) $(1, -1, -\sqrt{2})$

Aufgabe 67

(10 Zusatzpunkte)

Sei $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie für die folgenden Kurven die Geschwindigkeit $\vec{x}(t)$ und zeichnen Sie die Kurven.

a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (3\pi - t) \cos t \\ (3\pi - t) \sin t \end{pmatrix}$ b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \\ t \end{pmatrix}$

Aufgabe 68

(keine Abgabe)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (a) eine ONB des \mathbb{R}^3 und (b) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem (c) die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)) \cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t)) \sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von \vec{e}_r , \vec{e}_θ und \vec{e}_ϕ aus.

Aufgabe 69

(4+4+4 = 12 Punkte)

Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im \mathbb{R}^3 ,

$$2x_1 + 1 + 9x_3 = x_2.$$

- a) Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform von E_1 an.
Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

Die Ebene E_2 im \mathbb{R}^3 ist gegeben als

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- b) Geben Sie die Hessesche Normalform von E_2 an.
c) Bestimmen Sie die Schnittmenge von E_2 und E_1 .

Aufgabe 70¹

(10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- a) AA^T , b) $A^T A$, c) $AA^T B$, d) $A^T AB$,
e) $B^T AA^T$, f) A^2 , g) $A^T AA^T A$.

HINWEIS: Assoziativität ist hilfreich.

Aufgabe 71

(6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 03.02.19 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Matrix elements*,
- *Matrix equations: scalar multiplication* und
- *Multiply matrices*.

HINWEIS: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).

¹Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.