

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 25.01.2019)

Aufgabe 72

(4+4+3+4=15 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie $\det A$.
- Berechnen Sie B^{-1} und $\det B$.
- Bestimmen Sie $\det C$, $\det(C^{-1})$ und $\det(C^5)$.
- Berechnen Sie mithilfe von B^{-1} die Lösungen \vec{x} und X von

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BX = C.$$

Wie hätten Sie \vec{x} oder X berechnen können, ohne zunächst B^{-1} zu bestimmen?

Aufgabe 73

(10 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 \neq 0$ und sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ x & y & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Bestimmen Sie } A^{-1}.$$

HINWEIS: Die Abkürzung $r^2 := x^2 + y^2$ ist geschickt, und das Ergebnis lässt sich besonders hübsch in der Form $A^{-1} = \frac{1}{r^2}(\dots)$ angeben.

Aufgabe 74

(10 Punkte)

Seien $\alpha, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, und sei $A(b, \alpha) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definiert durch

$$A(b, \alpha) = b \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie $A(b_1, \alpha_1) \cdot A(b_2, \alpha_2)$.
- Bestimmen Sie $B_n := (A(b, \alpha))^n$, $\det(B_n)$ sowie $(B_n)^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

HINWEIS: Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix A durch

$$A^0 = I \text{ und } A^{n+1} = AA^n, \\ \text{d.h. } A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \dots$$

Aufgabe 75

(8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 03.02.19 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Inverse of a 3×3 matrix,*
- *Determinant of a 3×3 matrix,*
- *Represent linear systems with matrix equations* und
- *Divide complex numbers.*

HINWEIS: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).