Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 18/19
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 08.02.2019

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 107 Punkte erreichbar, 86 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 43 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+5 = 8 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} 4\nu(-1)^\nu \,.$$

a) Bestimmen Sie s_0, s_1 und s_2.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$s_n = (-1)^n(2n+1) - 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$. Berechnen Sie $f'(x)$.

Aufgabe 3 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3\cos(x) + (1+x^2)x^2}{12 - 7x^4}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\big(\exp(x^2) - \cos x\big)^3}{x^2 \sin^4 x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x} - \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sin(2x)} - \frac{1}{2x\sin x}\right)$

Aufgabe 4 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{18}{19}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{19} 2^{n-10}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{20} \binom{19}{n} 18^n$ d) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{19}\sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{\nu}{20-\nu}$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^4 = -4$. Zeichnen Sie diese z in einem Diagramm der komplexen Ebene ein.

Aufgabe 6 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{x^4-16}$ und b) $\dfrac{\cos x}{1+x^2}$ um Null, sowie die Taylorreihe von

c) $\dfrac{1}{x(2-x)}$ um $x_0 = 1$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$. Bestimmen Sie $f^{(4)}(0)$.

Aufgabe 8 (1+3+2+2+3+3 = 14 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + (x-4)|x| + 8}{4|x|}\,.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 9 (2+4+3+3+3 = 15 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie $\det A$.
b) Berechnen Sie A^2 und A^3.
c) Bestimmen Sie A^{-1}.
d) Bestimmen Sie alle X, die $AX = B$ erfüllen.
e) Berechnen Sie $B^T A^{2019} B$.

Aufgabe 10 (4+3+6= 13 Punkte)

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2\,,$$

und sei $\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

a) Berechnen Sie $\|\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\|$ und $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.
b) Zeigen Sie: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0 \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$.
c) Tatsächlich ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts.