Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 18/19

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 16.04.2019

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 102 Punkte erreichbar, 82 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 41 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+5 = 8 Punkte)
Seien $a_0 = 2$ und

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \qquad \forall\, n \geq 0\,.$$

a) Bestimmen Sie a_1, a_2 und a_3.
b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \forall\, n \geq 0\,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{2019} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$. Berechnen Sie $f'(x)$.

Aufgabe 3 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^7 - 1}{x^9 - 1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{\sin(2x)}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)^2}{(1 - \cos x)^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^{18} - 2x^9} - \sqrt{x^{18} + x^9}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

Aufgabe 4 (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{19} \binom{19}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{19} \binom{19}{n} \left(1 + (-1)^n\right)$ c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{22} \binom{19}{n-3} 2^n$

d) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{19} \sum_{\mu=\nu}^{19} \frac{19!}{(\mu+1)!(19-\mu)!}$

Aufgabe 5 (2+2+4 = 8 Punkte)

Sei $w = 1 + \mathrm{i}$.

a) Berechnen Sie $\mathrm{Re}(w^4)$ und $\mathrm{Im}(w^4)$.
b) Zeichnen Sie w und w^4 in einem Diagramm der komplexen Ebene ein.
c) Zeichnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die $z^4 = (1+\mathrm{i})^4$ lösen, in einem Diagramm der komplexen Ebene ein.

Aufgabe 6 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{x^3 - 27}$ und b) $\dfrac{\sin x}{1 + x^2}$ um Null, sowie die Taylorreihe von

c) $\dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ um $x_0 = 2$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 7 (1+3+2+2+3+3 = 14 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{(x+4)|x| - x^2 - 8}{4|x|}.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 8 (2+3+4 = 9 Punkte)

Sei $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det A$.
b) Berechnen $A^T A$.
c) Bestimmen Sie A^{-1}.

Aufgabe 9 (4+2+6 = 12 Punkte)

Sei $\vec{n} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{n} \cdot \vec{x} = 0\}$.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung von E an.
b) Zeigen Sie, dass E ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.
c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von E (bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$).

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{9\times 9}$, und sei $\det(ABC) = 2019$. Ist B invertierbar?
Begründen Sie Ihre Antwort.