Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz, Dominik Edelmann

WiSe 2019/20
30.05.2020

Musterlösung
zur Nachklausur der Analysis I

Aufgabe 1. **(a)** Sei M eine endliche Menge und $f\colon M \to M$ eine injektive Abbildung. Begründen Sie, warum f dann bereits bijektiv sein muss.

(b) Geben Sie ein $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, welches zwar injektiv aber nicht bijektiv ist und begründen Sie.

Lösungsvorschlag. **(a)** Wir dürfen annehmen, dass $M = \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ ist. (Die Fälle $n = 1$ und $n = 0$ sind trivial, da es dann nur eine Abbildung von M auf sich selbst gibt, nämlich die Identität, und die ist bijektiv.) Ist $f\colon M \to M$ nun injektiv, so sind die Elemente $f(1), \dots, f(n) \in M$ paarweise verschieden, also hat $\{f(1), \dots, f(n)\}$ schon n Elemente. Es muss daher $\{f(1), \dots, f(n)\} = M$, also f surjektiv und damit bijektiv sein.

(b) Betrachte $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$. Wir fassen $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ auf und rechnen in $\mathbb{Z}$. Ist nun $f(m) = f(n)$ für $m, n \in \mathbb{N}$, also $m + 1 = n + 1$, so folgt nach Subtraktion von 1 aus beiden Seiten $n = m$, also ist f injektiv. Andererseits ist $1 \notin \mathrm{Bild}(f)$, denn $f(n) = 1$, würde $n + 1 = 1$ bedeuten. Diese Gleichung hat aber in $\mathbb{Z}$ nur die Lösung $n = 0$, welche nicht in $\mathbb{N}$ liegt. f ist also nicht surjektiv und damit nicht bijektiv.

Aufgabe 2. **(a)** Sei (x_n) eine reelle Folge mit $\lim(x_n) = a > 0$ und (y_n) eine reelle Folge mit $\lim(y_n) = \infty$. Zeigen Sie, dass auch $\lim(x_n y_n) = \infty$ ist.

(b) Sei $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ ein reelles Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 0$. Begründen Sie, warum $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$ ist.

Lösungsvorschlag. **(a)** Sei $M > 0$. Wegen der Konvergenz von (x_n) gegen $a > 0$ und von (y_n) gegen ∞ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$,so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$x_n > \frac{a}{2}, \quad y_n > \frac{2M}{a}.$$

Dann ist für alle $n \geq n_0$:

$$x_n y_n > \frac{a}{2} \cdot \frac{2M}{a} = M,$$

also $\lim(x_n y_n) = \infty$.

(b) Sei (x_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $(x_k) \to \infty$. Wir haben zu zeigen, dass auch $(P(x_k))$ gegen ∞ konvergiert. Aber mit (x_k) strebt auch auch (y_k) mit $y_k := x_k^n$ gegen ∞ und (z_k) mit

$$z_k = a_n + a_{n-1}\frac{1}{x_k} + \cdots + a_0\frac{1}{x_k^n}$$

(wir dürfen annehmen, dass $x_k \neq 0$ ist, für alle $k \in \mathbb{N}$) strebt nach den bekannten Grenzwertsätzen gegen $a_n > 0$. Nach Teil (a) folgt daraus:

$$P(x_k) = a_n x_k^n + \cdots + a_0 = x_k^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x_k} + \cdots + a_0\frac{1}{x_k^n}) = y_k \cdot z_k \longrightarrow \infty,$$

also ist

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty.$$

Aufgabe 3. **(a)** Sei P ein reelles Polynom ungeraden Grades. Begründen Sie, warum P eine Nullstelle haben muss.

(b) Geben Sie für jede gerade natürliche Zahl n ein reelles Polynom vom Grad n ohne Nullstelle an und begründen Sie.

Lösungsvorschlag. **(a)** Sei $P = a_{2k+1}x^{2k+1} + \cdots + a_0$ ein Polynom ungeraden Grades $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}_0$), also $a_{2k+1} \neq 0$. Wegen

$$P(-x) = (-1)^{2k+1}a_{2k+1}x^{2k+1} \pm \cdots + a_0 = -a_{2k+1}x^{2k+1} \pm \cdots + a_0$$

gilt im Fall $a_{2k+1} > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$$

und im Fall $a_{2k+1} < 0$:

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty.$$

Wir behandeln den ersten Fall, der zweite verläuft analog. Wegen des asymptotischen Verhaltens von P gibt es nun sicher $a < 0$ und $b > 0$ mit

$$P(a) \leq -1 < 0, \quad P(b) \geq 1 > 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz, denn $P|[a,b]$ ist stetig, existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $P(\xi) = 0$. P hat also eine Nullstelle.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, also $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$x^{2k} = (x^k)^2 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

also

$$x^n + 1 = x^{2k} + 1 \geq 1 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Das Polynom $P = X^n + 1$ ist also vom Grad n und hat keine Nullstelle.

Aufgabe 4. **(a)** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und streng monoton wachsend. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) \geq 0$.

(b) Geben Sie ein differenzierbares und streng monoton wachsendes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, wo nicht $f' > 0$ gilt und begründen Sie das.

Lösungsvorschlag. (a) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $h > 0$. Da f streng monoton wachsend ist, ist $f(x+h) > f(x)$ und damit

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) > 0.$$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten ist aber insbesondere der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten und daher gilt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \geq 0.$$

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, ist streng monoton wachsend, denn für $x < y$ ist auch $x^3 < y^3$. Es ist aber f auch differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$ und damit $f'(0) = 0$. Also gilt nicht, dass $f'(x) > 0$ ist, für alle $x \in \mathbb{R}$ (d.i..: $f' > 0$).

Aufgabe 5. (a) Begründen Sie, warum $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{\arctan(x^2+1)}$ differenzierbar ist und berechnen Sie f'.

(b) Begründen Sie, warum f bei $x = 0$ ein globales striktes Minimum hat.

Lösungsvorschlag. (a) Die Funktionen $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ und $g_3\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$g_1(x) = x^2 + 1, \quad g_2(y) = \arctan(y), \quad g_3(z) = \sqrt{z},$$

sind allesamt differenzierbar und es gilt: $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$. (Man beachte, dass der Radikand von f stets positiv ist.) Damit ist f differenzierbar und es gilt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g_3'(g_2 \circ g_1(x)) \cdot g_2'(g_1(x)) \cdot g_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x^2+1)}} \cdot \frac{1}{1+(x^2+1)^2} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{(1+(x^2+1)^2)\sqrt{\arctan(x^2+1)}}. \end{aligned}$$

(b) Es folgt, dass $f'|(-\infty, 0) < 0$ und $f'|(0,\infty) > 0$ ist, also (nach dem Mittelwertsatz) dass $f|(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und $f|[0,\infty)$ streng monoton wachsend ist. Deshalb muss $x = 0$ ein globales striktes Minimum sein.

Aufgabe 6. (a) Berechnen Sie mit Hilfe von partieller Integration das Integral $\int_1^2 x \ln(x)\, dx$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Substitution das Integral $\int_0^1 x/\sqrt{x^2+1}\, dx$.

Lösungsvorschlag. (a) Mit $u, v\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $u(x) = \ln(x)$ und $v(x) = x^2/2$ ist $u'(x) = 1/x$ und $v'(x) = x$ und damit mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \cdot \ln(x)\, dx &= \int_1^2 u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)|_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x)\, dx \\ &= (\ln(2) \cdot \frac{1}{2} 2^2 - \ln(1) \cdot \frac{1}{2} 1^2) - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\, dx \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{4} x^2|_1^2 = 2\ln(2) - \frac{1}{4}(2^2 - 1^2) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(b) Mit der Substitution $u = x^2 + 1$, also $x = \sqrt{u-1} =: \varphi(u)$, $\varphi\colon [1,2] \to [0,1]$, ist

$$\varphi'(u) = \frac{dx}{du} = (\frac{du}{dx})^{-1} = \frac{1}{2x}$$

(oder kurz: $du = 2xdx$) und damit nach der Substitutionsregel

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}|_1^2 = \sqrt{2} - 1.$$