Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
16. Dezember 2019

Mathematik für Physiker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 10

Aufgabe 41: Das ebene Pendel

Physikalischer Hintergrund: Wir betrachten ein Pendel der folgenden Form: An einem dünnen Stab der Länge $\ell > 0$ ist ein Gewicht der Masse $m > 0$ aufgehängt und es wirkt die Gravitationskraft mit Gravitationskonstante $g > 0$. Das Pendel soll nur in einer Ebene schwingen und der Auslenkungswinkel zum Zeitpunkt t relativ zur Ruhelage (das Pendel hängt senkrecht nach unten) werde mit $\varphi(t)$ bezeichnet.

Das Newtonsche Gesetz "Masse mal Beschleunigung = Kraft" liefert dann die folgende Differentialgleichung für den Auslenkungswinkel $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus der Ruhelage als Funktion der Zeit:

$$m\,\ell\,\ddot{\varphi}(t) = -m\,g\,\sin(\varphi(t))\,.$$

Mathematisches Aufgabenstellung: Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um. Skizzieren Sie dann das zugehörige Vektorfeld (für $\ell = 1$ und $g = 1$) und einige Integralkurven entweder von Hand oder mithilfe eines geeigneten Programms (oder beides). Interpretieren Sie die verschiedenen Typen von Integralkurven und besondere Punkte des Vektorfeldes.

Hinweis: Das zugehörige Vektorfeld lautet $v(x_1, x_2) = (x_2, -\frac{g}{\ell}\sin(x_1))$.

Aufgabe 42: Getrennte Variable

Lösen Sie jeweils das Anfangswertproblem

$$\dot{\gamma}(t) = v(t, \gamma(t)), \quad \gamma(0) = x_0\,,$$

durch Trennung der Variable für

(a) $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(t,x) = tx$

(b) $v : \mathbb{R} \times (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $v(t,x) = \frac{t^2}{\sin(x)}$.

Aufgabe 43: Eindeutigkeit von Lösungen?

Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x) = \sqrt{|x|}$. Bestimmen Sie alle Lösungen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $\dot{\gamma} = v(\gamma)$ zum Anfangswert $\gamma(0) = -1$ und skizzieren Sie einige der Lösungen in einem Raum-Zeit-Diagramm!

Aufgabe 44: Klassiche Mechanik

Bewegt sich ein Teilchen der Masse $m > 0$ in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ unter dem Einfluss einer Kraft $F : D \to \mathbb{R}^3$, so löst die Bahnkurve des Teilchens $t \mapsto \gamma(t)$ die Gleichung

$$m\,\ddot{\gamma}(t) = F(\gamma(t)) \qquad\qquad (\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Kraft})\,.$$

Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung als ein System von Gleichungen erster Ordnung.

Lösen Sie die Differentialgleichung erster Ordnung für beliebige Anfangsdaten im Fall eines Teilchens im homogenen Schwerefeld, also für $D = \mathbb{R}^3$ und $F(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, -mg)$, wobei $g > 0$ die Gravitationskonstante heißt.

Hinweis: Die Lösungen heißen auch Wurfparabeln.

Aufgabe 45: Kettenlinie

Wir modellieren eine Kette der Länge $\ell > 2$ im Schwerefeld durch eine Kurve im $\mathbb{R}^2$, welche durch den Graphen einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ beschrieben wird. Die Kette sei aufgehängt an den Punkten $(-1,0)$ und $(1,0)$, es gelte also $f(-1) = f(1) = 0$.

Die tatsächliche Lage der Kette ist dadurch bestimmt, dass sie ihre potentielle Energie im Schwerefeld unter den gegebenen Nebenbedingungen minimiert, also die beschreibende Funktion f_0 das Energiefunktional

$$E : C^2([-1,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,, \quad f \mapsto E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

bei fester Länge ℓ und bei festen Endpunkten minimiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Länge der Kurve durch

$$L(f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

gegeben ist, indem Sie die Kurve parametrisieren und die Definition von Weglänge wie im Schrankensatz zugrundelegen.

(b) Leiten Sie mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung aus der Vorlesung eine Differentialgleichung her, die jeder kritische Punkt f von E unter den obigen Nebenbedingungen erfüllen muß.

(c) Zeigen Sie, dass

$$f_0(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c,$$

die Differentialgleichung für geeignete Wahl von c löst. Zeigen Sie weiterhin, dass a und c durch Vorgabe von $\ell > 2$ und der Aufhängungspunkte eindeutig bestimmt sind.

Bemerkung: Es liefert f_0 tatsächlich das globale Minimum von E unter den gegebenen Nebenbedingungen.

Schöne Feiertage und ein gutes neues Jahr!

Abgabe: Bis Dienstag 07.01. um 12.00 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.