Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
7. Januar 2020

Mathematik für Physiker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 11

Aufgabe 46: Die Lipschitz-Bedingung

(a) Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $v : U \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto v(t, x)$ stetig. Zeigen Sie, dass v einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt, falls alle partiellen Ableitungen $\partial_{x_j} v$ bezüglich der Variablen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ existieren und auf U stetige Funktionen definieren.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $v : U \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Zeigen Sie, dass dann für jedes Kompaktum $K \subset U$ die Einschränkung $v|_K$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Hinweis: Für (a) verwende man den Schrankensatz bei (b) zeigt man leicht die Kontraposition.

Aufgabe 47: Globale Existenz*

Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld, d.h. es existiere eine Konstante $L < \infty$, sodass $\|v(x) - v(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige globale Lösung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung

$$\gamma' = v(\gamma) \quad \text{und} \quad \gamma(0) = x_0$$

existiert. “Globale Lösung” bedeutet, dass das Existenzintervall der Lösung ganz $\mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die explizite Form der zunächst x_0-abhängigen unteren Schranke an das Existenzintervall der lokalen Lösung aus dem Satz von Picard-Lindelöf und die globale Lipschitzkonstante, um eine x_0-unabhängige untere Schranke an das Existenzintervall zu zeigen. Machen Sie sich klar, dass Sie dann schon fertig sind.

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben zählen nicht zum Aufgabenpool aus dem 50% erreicht werden müssen.

Abgabe: Bis Montag 13.01. um 18.00 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.