

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER 3 / ANALYSIS 2

Übungsblatt 12

Aufgabe 48: Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L . Für $x \in G$ sei $\gamma_x : I(x) \rightarrow G$ die maximale Lösung der Differentialgleichung $\gamma' = v(\gamma)$ zum Anfangswert $\gamma_x(0) = x$.

Zu jedem $x_0 \in G$ und $t_* \in I(x_0)$ gibt es eine Umgebung $U \subset G$ von x_0 so, dass $t_* \in I(x)$ für alle $x \in U$ (d.h. $\{t_*\} \times U \subset \Omega = \{(t, x) \mid t \in I(x)\}$). Das folgt aus der Offenheit von Ω , muss aber hier nicht gezeigt werden. Damit existiert also die Lösung $\gamma_x(t_*)$ für alle $x \in U$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$U \rightarrow G, \quad x \mapsto \gamma_x(t_*),$$

Lipschitz-stetig ist. Man sagt, dass die Lösung stetig von den Anfangsdaten abhängt.

Hinweis: Verwenden Sie die Integraldarstellung von γ_x und das Lemma von Grönwall.

Aufgabe 49: Stetige Abhängigkeit vom Vektorfeld

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L und $w : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten nun die Differentialgleichungen

$$\gamma' = v(\gamma) \quad \text{mit} \quad \gamma(0) = x_0 \tag{1}$$

$$\alpha' = w(\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha(0) = x_0 \tag{2}$$

und nehmen an, dass eine Lösung α von (2) auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall $\tilde{I} \subset I(x_0)$ existiere. Hier bezeichnet $I(x_0)$ wieder das Existenzintervall der eindeutigen maximalen Lösung γ von (1).

Zeigen Sie, dass dann für $t \in \tilde{I}$ gilt

$$\|\gamma(t) - \alpha(t)\| \leq |\tilde{I}| \|v - w\|_\infty e^{Lt},$$

die Lösungen zum selben Anfangswert x_0 also zunächst nahe beieinander bleiben, wenn sich die Vektorfelder nur wenig unterscheiden. Es bezeichnet $|\tilde{I}|$ hier die Länge des Intervalls \tilde{I} .

Aufgabe 50: Qualitatives Verhalten und Stabilität von stationären Punkten

Wir betrachten die autonome Gleichung erster Ordnung $\gamma' = v(\gamma)$ zu dem Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto v(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-y} \sin(x) + e^y \sin(3x) \\ -e^{-y} \cos(x) + e^y \cos(3x) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die Lösungen dieses Systems zumindest qualitativ verstehen und gehen dazu wie folgt vor:

- Bestimmen Sie zunächst die stationären Punkte, also die Nullstellen von v .
(*Ergebnis:* $v(x, y) = 0$ genau dann wenn $y = 0$ und $x = n\frac{\pi}{2}$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.)
- Bestimmen Sie die lineare Approximation des Vektorfelds $v(x, y)$ um die stationären Punkte (x_i, y_i) , d.h. bestimmen Sie jeweils die Matrix $Dv|_{(x_i, y_i)}$, für die ja dann

$$v(x, y) = Dv|_{(x_i, y_i)} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix} + o(\|(x - x_i, y - y_i)\|)$$

gilt. Diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen in der Nähe des jeweiligen stationären Punktes, indem Sie dort die Linearisierung des Vektorfelds und einige zugehörige Integralkurven skizzieren.

- Überlegen Sie sich, wie das Vektorfeld für $y \gg 1$ und für $y \ll 1$ jeweils aussieht und skizzieren Sie das Vektorfeld und einige Integralkurven auch außerhalb der kritischen Punkte. Skizzieren Sie insbesondere die Separatrizen, also diejenigen Integralkurven, die Gebiete qualitativ unterschiedlicher Lösungen im Phasenraum voneinander abgrenzen. (Beim ebenen Pendel ist die Integralkurve, welche die instabile Gleichgewichtslage mit sich selbst verbindet, eine Separatrix.)
- Für welche Anfangsdaten erwarten Sie globale Existenz von Lösungen, also $I(x_0, y_0) = \mathbb{R}$?

Hinweis: Um Ihre Ergebnisse zu überprüfen, können Sie auch ein Programm wie MatLab oder Mathematica (leider nicht mehr kostenlos über das ZDV verfügbar) verwenden, um das Vektorfeld und einige Integralkurven zu plotten. (Suchen Sie in der Dokumentation nach Stream Line Plot oder Stream Plot.) Mathematica ist auch über die WolframAlpha Webpage teilweise zugänglich. Dort erhalten Sie den Plot z.B. mit dem Befehl

$$\text{StreamPlot}[\{Exp[-y] * Sin[x] + Exp[y] * Sin[3x], -Exp[-y] * Cos[x] + Exp[y] * Cos[3x]\}, \\ \{x, -0.1, 2 * Pi + 0.1\}, \{y, -1, 2\}]$$

wobei Sie mit den Intervallgrenzen experimentieren können und die Separatrizen in diesen Plots typischerweise nicht explizit sehen werden.

Abgabe: Bis Montag 20.01. um 18.00 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.