Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
20. Januar 2020

Mathematik für Physiker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 13

Aufgabe 51: Der Lösungsoperator linearer Differentialgleichungen

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : J \to M(n, \mathbb{R})$ stetig. Sei $\Phi(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Propagator der homogenen linearen Differentialgleichung $\gamma' = A(t)\gamma$ zum Anfangszeitpunkt t_0. Zeigen Sie:

- Für alle $t \in J$ ist $\Phi(t)$ ein Vektorraumisomorphimus.
- Die Matrix $\Phi(t)$ erfüllt
$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad \text{mit} \quad \Phi(t_0) = E_n.$$

Überlegen Sie sich auch, was die Spalten der Matrix $\Phi(t)$ sind. Beherzigen Sie dazu die Merkregel "Die Spalten einer Matrix sind die Bilder der Basisvektoren".

Aufgabe 52: Die Dyson-Reihe

Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Intervall, $t_0 \in J$ und $A : J \to M(n \times n, \mathbb{R})$ stetig. Wir betrachten die Differentialgleichung
$$\gamma' = A(t)\,\gamma \tag{1}$$
und machen den Ansatz
$$\gamma(t) = \left(E_n + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} \mathrm{d}\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{j-1}} \mathrm{d}\tau_j \, A(\tau_1) \cdots A(\tau_j) \right) x_0.$$

(a) Rechnen Sie nach, dass γ die Differentialgleichung (1) zumindest formal löst, also indem Sie die Reihe einfach gliedweise differenzieren.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe in der Definition von $\gamma(t)$ absolut konvergent ist für alle $t \in J$.

(c) Zeigen Sie, dass $\gamma \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ und, dass γ tatsächlich die Differentialgleichung (1) löst.
Hinweis: Hierzu müssen Sie zeigen, dass Sie die Reihe gliedweise differenzieren dürfen. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Partialsummenfolge der abgeleiteten Reihe gleichmäßig konvergiert (vgl. Analysis 1).

Aufgabe 53: Variation der Konstanten

Bestimmen Sie für die folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen die Lösung jeweils zu einem beliebigen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) $\gamma' = -\dfrac{\gamma}{1+t} + \mathrm{e}^{2t}$ für beliebiges $t_0 \in (-1, \infty)$.

(b) $\gamma' = \tan(t)\gamma + \dfrac{1}{\cos(t)}$ für $t_0 = 0$.

Aufgabe 54: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

(a) Betrachten Sie eine allgemeine homogene lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h.

$$\sum_{j=0}^{m} a_j\, \gamma^{(j)}(t) = 0, \quad \text{mit} \quad a_m = 1. \tag{2}$$

Wir definieren das zugehörige charakteristische Polynom durch $p(\lambda) := \sum_{j=0}^{m} a_j \lambda^j$. Sei nun λ_0 eine ℓ-fache Nullstelle von p.

Zeigen Sie, dass für $k = 0, 1, \ldots, \ell - 1$ die Funktionen

$$\gamma_k(t) = t^k\, \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

linear unabhängige Lösungen von (2) sind.

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass (2) in der Form

$$Q(D)\,(D - \lambda_0)^{\ell} \gamma(t) = 0$$

mit $D := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ und einem geeigneten Polynom Q geschrieben werden kann.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\gamma^{(4)}(t) - 2\gamma''(t) + \gamma(t) = \mathrm{e}^t$$

indem Sie gemäß Teil (a) bzw. Bemerkung 9.22 aus dem Skript die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden.

Hinweis: Machen Sie für die spezielle Lösung der inhom. Gleichung den Ansatz $\gamma_{\mathrm{i}}(t) = c\, t^k \mathrm{e}^t$. Wählen Sie k dabei groß genug, um nicht wieder eine Lösung der homogenen Gleichung zu erhalten, aber nicht größer.

Aufgabe 55: Die Legendre-Differentialgleichung*

Betrachten Sie die Legendresche Differentialgleichung

$$(1 - t^2)\, \gamma''(t) - 2t\, \gamma'(t) + n(n+1)\, \gamma(t) = 0$$

auf dem Intervall $J = (-1, 1)$.

(a) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine Lösung mittels Potenzreihenansatz

$$\gamma_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,j}\, t^j.$$

Hinweis: Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $c_{n,j}$. Wählen Sie die Startwerte $c_{n,0}$ und $c_{n,1}$ so, dass die Rekursion abbricht.

(b) Bestimmen Sie γ_n für $n = 0, 1, 2, 3$. Bestimmen Sie anschließend Konstanten α_n, sodass $P_n(t) := \alpha_n\, \gamma_n(t)$ die Normierungsbedingung $P_n(1) = 1$ erfüllt. Überprüfen Sie, ob die so erhaltenen Polynome P_n mit den in der Vorlesung definierten Legendrepolynomen übereinstimmen.

Abgabe: Bis Montag 27.01. um 18.00 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.