Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
27. Januar 2020

Mathematik für Physiker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 14

Aufgabe 56: Integration durch Differentiation nach Parametern

Bestimmen Sie das Integral $\int_0^x t^n \mathrm{e}^t \, dt$ durch Differenzieren des parameterabhängigen Integrals

$$\alpha \mapsto I(\alpha) = \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t} \, \mathrm{d}t \, .$$

Begründen Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 57: Integral über Normalbereiche

Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Fassen Sie die Fläche unter dem Graphen von f und überhalb der x-Achse als x-Normalbereich $A \subset \mathbb{R}^2$ auf und berechnen Sie die Fläche von A durch Integration über den Normalbereich A.

Berechnen Sie dann das Integral der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$, über A für den Fall $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, also

$$\int_A g(x, y) \, \mathrm{d}(x, y) \, .$$

Aufgabe 58: Integration in Kugelkoordinaten

Sei $X = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^3$ dann ist $\Phi : X \to \Phi(X) \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta \sin\varphi,\ r\cos\theta) =: (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))$$

ein Diffeomorphismus und beschreibt Kugelkoordinaten auf dem $\mathbb{R}^3$ (vgl. Aufgabe 25 auf Blatt 6).

Stellen Sie die folgenden Funktionen in Kugelkoordinaten dar und berechnen Sie jeweils mit Hilfe der Transformationsformel das Integral über die Einheitskugel $B := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^3$:

(a) $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 1$

(b) $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = x^2 + y^2$

Aufgabe 59: Der Satz von Stokes: Ein Beispiel

Es bezeichne $A := \overline{B_R(0)}$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius $R > 0$.

(a) Sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto v(x, y) = (ay, bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie sowohl

$$\int_A \operatorname{rot}(v) \, \mathrm{d}(x, y) \qquad \text{als auch} \qquad \int_{\partial A} v \cdot \mathrm{d}s \, ,$$

wobei die Rotation für Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^2$ durch $\operatorname{rot}(v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \partial_x v_y - \partial_y v_x$ definiert ist und ∂A denjenigen Weg bezeichnet, der den Rand von A einmal im positiven Sinne durchläuft.

(b) Sei nun $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto v(x, y)$ ein beliebiges stetig differenzierbares Vektorfeld. Bestimmen Sie

$$\lim_{R \to 0} \frac{1}{R^2 \pi} \int_{\partial A} v \cdot \mathrm{d}s \, .$$

Hinweis: Taylorentwicklung.