Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
21. Oktober 2019

Mathematik für Phyisker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 2

Aufgabe 4: Konvergenz in metrischen Räumen

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:
Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $a \in X$ (gemäß Definition 1.22 aus der Vorlesung), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \; d(x_n, a) < \varepsilon.$$

(b) Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Metrik. Zeigen Sie:
Eine Folge (x_ν) in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}^n$, wenn jede Komponentenfolge $(x_{\nu,j})$ in $\mathbb{R}$ gegen a_j konvergiert, also

$$\lim_{\nu \to \infty} x_{\nu,j} = a_j \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 5: Inneres, Abschluss und Rand

(a) Sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie ausgehend von Definition 1.19 aus der Vorlesung:

i) $\mathring{Y}$ ist die Menge der inneren Punkte von Y.

ii) Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Randpunkt von $Y \subset X$, wenn jede Umgebung von x sowohl einen Punkt aus Y als auch einen Punkt aus $Y^c := X \backslash Y$ enthält.

iii) $\partial Y = \partial(Y^c)$.

iv) $\mathring{Y} = Y \setminus \partial Y$.

v) $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$.

(b) Bestimmen Sie das Innere und den Rand von

$$M := [0,1] \backslash \left\{ \tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aufgabe 6: Stetige Funktionen auf metrischen Räumen

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Metrik.

(a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Lipschitz-stetig, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b) \qquad \text{für alle } a, b \in X.$$

Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

(b) Zeigen Sie: Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, ist genau dann stetig, wenn alle $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, stetig sind.

Hinweis: Verwenden Sie die Resultate aus Aufgabe 4 und die Tatsache, dass es nach Proposition 2.6 genügt, die Folgenstetigkeit der jeweiligen Funktionen nachzuweisen.

Aufgabe 7: Der Abstand zu einer Menge

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subset X$ eine beliebige nichtleere Teilmenge. Man definiert die Abstandsfunktion zu T durch

$$d_T : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d_T(x) := \inf\{d(x,y) \mid y \in T\}.$$

Machen Sie sich klar, dass d_T wohldefiniert ist. Zeigen Sie dann:

(a) $\overline{T} = \{x \mid d_T(x) = 0\}$.

(b) d_T ist stetig.

Tipp: Zeigen Sie dafür zunächst, dass für beliebige $x, z \in X$ gilt: $|d_T(x) - d_T(z)| \leq d(x,z)$.

Aufgabe 8: Eine nicht vollständige Metrik auf den reellen Zahlen*

Finden Sie eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ so, dass $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist.

Tipp: Konstruieren Sie eine Metrik, bzgl. derer $x_n = n$ eine Cauchy-Folge ist. Dabei hilft Ihnen beispielsweise eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $(-1,1)$ und Aufgabe 1 (a).

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben zählen nicht zum Aufgabenpool aus dem 50% erreicht werden müssen.

Abgabe: Bis Montag 28.10. um 18 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.