

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER 3 / ANALYSIS 2

Übungsblatt 3

Aufgabe 9: Stetige Funktionen?

- (a) An welchen Punkten ist die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (b) Sei $V := C_b^1(\mathbb{R}) := \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty < \infty \text{ und } \|f'\|_\infty < \infty\}$ der Raum der beschränkten stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit beschränkter Ableitung und $W := C_b(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty < \infty\}$ der Raum der beschränkten stetigen Funktionen. Wir betrachten V und W versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ als normierte Räume. Zeigen Sie, dass die Ableitung als Abbildung $D : V \rightarrow W, f \mapsto D(f)$, mit $D(f)(x) := f'(x)$ an keinem Punkt $f \in V$ stetig ist.

Hinweis: Finden Sie eine konvergente Folge (f_n) in $(C_b^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ so, dass die Folge $(D(f_n)) = (f'_n)$ in $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nicht konvergiert. Das zeigt, dass die Funktion am Punkt $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ nicht stetig ist. Dann verwenden Sie die Linearität der Abbildung D um zu zeigen, dass D nirgends stetig ist.

Aufgabe 10: Funktionenfolgen

Geben Sie Beispiele für Funktionenfolgen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, und Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit den jeweiligen Eigenschaften an.

- (a) f_n ist stetig für alle n und die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen ein $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ das **nicht** stetig ist.
- (b) f_n ist stetig für alle n und die Folge (f_n) konvergiert punktweise aber **nicht** gleichmäßig gegen ein stetiges $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
- (c) f_n ist stetig differenzierbar für alle n und die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen ein $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ das **nicht** differenzierbar ist.

Hinweis: Skizzieren Sie zunächst die Graphen einer möglichst einfachen Grenzfunktion und einer entsprechenden Funktionenfolge mit der jeweiligen Eigenschaft und konstruieren Sie erst dann die expliziten Abbildungen.

Aufgabe 11: Zum Banachschen Fixpunktsatz

- (a) Sei $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) , $f : A \rightarrow A$ eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante $\theta < 1$, $x_0 \in A$ und $a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ der Limes der zugehörigen Iterationsfolge

$$x_{n+1} := f(x_n).$$

Zeigen Sie, dass $d(x_n, a) \leq \theta^n d(x_0, a)$.

- (b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \|f'\|_\infty$ ist. Insbesondere ist f also eine Kontraktion, wenn $\|f'\|_\infty < 1$ und $f(I) \subset I$ ist.

Hinweis: Erster Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

Aufgabe 12: Das Newton-Verfahren und der Banachsche Fixpunktsatz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und $f(x) := x - \frac{g(x)}{g'(x)}$. Machen Sie sich klar, dass

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = f(x).$$

Es ist also a genau dann Nullstelle von g wenn a Fixpunkt von f ist. Das Newton-Verfahren besteht nun darin, die Nullstellen von g durch Iterationsfolgen $x_{n+1} = f(x_n)$ zu approximieren.

- (a) Überlegen Sie sich zunächst geometrisch anhand einer Zeichnung warum zu erwarten ist, dass die Folge (x_n) gegen eine Nullstelle von g konvergiert, falls der Startwert x_0 hinreichend nahe an einer Nullstelle liegt.

Nun nehmen wir zusätzlich an, dass g bei $a \in I$ eine Nullstelle hat, also $g(a) = 0$ gilt, und setzen $I_0 := [a - \delta_0, a + \delta_0]$ mit $\delta_0 > 0$ so klein, dass $I_0 \subset I$.

- (b) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 11 (b), dass $f|_{I_0}$ eine Kontraktion ist, wenn man $\delta_0 > 0$ klein genug wählt, also $f(I_0) \subset I_0$ und $|f(x) - f(y)| \leq \theta_0 |x - y|$ für ein $\theta_0 < 1$ und alle $x, y \in I_0$ gilt.

Zwischenergebnis: Man kann $\theta_0 = K\delta_0$ wählen, wobei $K = \frac{c_1 c_2}{c_3}$ mit $c_1 = \max_{x \in I_0} |g'(x)|$, $c_2 = \max_{x \in I_0} |g''(x)|$ und $c_3 = \min_{x \in I_0} |g'(x)|^2$.

Insbesondere konvergiert also das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in I_0$ gegen die Nullstelle a , d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ für die Iterationsfolge $x_{n+1} = f(x_n)$.

- (c) Geben Sie eine Schranke für den Fehler im n ten Schritt an, also ein $S_n < \infty$ so, dass $|x_n - a| \leq S_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$.

Hinweis: Aufgabe 11 (a).

- (d) Verbessern Sie die Schranke aus (c) (d.h. finden Sie eine kleinere Schranke s_n), indem Sie die Newton-Iteration auf einer Folge von geeigneten Intervallen $I_n := [a - \delta_n, a + \delta_n]$ betrachten und jeweils auch δ_n und somit θ_n neu abschätzen (allerdings nicht K , da hier im Allgemeinen keine Verbesserung zu erwarten ist).

Ergebnis: Es gilt $|x_n - a| \leq \theta_0^{2^n - 1} |x_0 - a|$.

- (e) Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren in diesem Fall für alle Startwerte $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $a = \sqrt{2}$ konvergiert. Geben Sie für den Startwert $x_0 = \frac{3}{2}$ unter Verwendung von Teil (d) eine möglichst kleine Schranke an den Fehler $|x_n - \sqrt{2}|$ im n ten Schritt explizit an. Wieviele Schritte sind also gemäß dieser Abschätzung nötig, um 20 Nachkommastellen von $\sqrt{2}$ korrekt zu berechnen? Wieviele Schritte sind tatsächlich nötig? Führen Sie dazu die Iteration mit einem Taschenrechner explizit durch. Erklären Sie die Diskrepanz.

Abgabe: Bis Montag 04.11. um 18 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.