Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
4. November 2019

Mathematik für Phyisker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 4

Aufgabe 13: Gleichmäßige Stetigkeit

Genau wie in Analysis 1 für Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert man auch für Funktionen $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X und Y den Begriff der *gleichmäßigen Stetigkeit*: Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt gleichmäßig stetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass für alle $a \in X$ gilt

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) .$$

Machen Sie sich zunächst klar, was genau der Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit ist.

(a) Geben Sie zwei stetige nichtkonstante Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ explizit an, von denen die eine gleichmäßig stetig ist, die andere aber nicht. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

(b) Zeigen Sie: Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.
Hinweis: Man kann das entweder direkt beweisen, oder die Kontraposition mithilfe von Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe 14: Die Einheitskugel in normierten Räumen

Der Satz von Heine-Borel aus der Vorlesung besagt insbesondere, dass die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0) := \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$ in einem endlichdimensionalen normierten Raum V kompakt ist. Tatsächlich kann man auch die Umkehrung zeigen: ist die Einheitskugel in einem normierten Raum kompakt, so hat der Raum endliche Dimension. Wir werden in dieser Aufgabe allerdings nur zwei Beispiele unendlichdimensionaler normierte Räume kennenlernen, deren Einheitskugel nicht kompakt ist.

(a) Sei $\ell^2_{\mathbb{R}} := \{(x_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty\}$ der Raum der quadratsummierbaren reellen Folgen mit der Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^\infty x_n^2}$ für $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2_{\mathbb{R}}$. Wir stellen uns hier also geometrisch den unendlichdimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^\infty$ vor. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0)$ in $(\ell^2_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_2)$ nicht kompakt ist.

(b) Betrachte den Raum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0)$ in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt ist.

Hinweis: Finden Sie jeweils eine Folge in $K_1(0)$, die keine konvergente Teilfolge hat, und argumentieren Sie mit Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe 15: Separabilität

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Konstruieren Sie eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass jeder Punkt in X Häufungspunkt von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist.

Geben Sie dann ein möglichst einfaches aber nicht triviales Beispiel für einen solchen Raum und eine solche Folge an.

Hinweis: Konstruieren Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ endliche Überdeckungen durch $\frac{1}{n}$-Kugeln und verwenden Sie diese zur Konstruktion der gesuchten Folge.

Bemerkung: Ein topologischer Raum X heißt separabel, falls es eine abzählbare Teilmenge $D \subset X$ gibt, die dicht in X liegt. Man sagt, dass D dicht in X liegt, wenn jede nichtleere offene Menge in X mindestens einen Punkt aus D enthält. Somit haben Sie gezeigt, dass jeder kompakte metrische Raum separabel ist. Ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ auch separabel?

Aufgabe 16: Gebiete und Zusammenhang

(a) Zeigen Sie, dass jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gebiete in $\mathbb{R}$ genau die offenen Intervalle (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ sind.

(c) Zeigen Sie, dass jeder wegzusammenhängende topologische Raum zusammenhängend ist.

Hinweis: Teil (a) ist bei dieser Aufgabe am schwersten zu zeigen. Wenn Sie Teil (a) nicht hinbekommen, können Sie trotzdem die Teile (b) und (c) behandeln und die Aussage von (a) unbewiesen verwenden.

Abgabe: Bis Montag 11.11. um 18.00 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.