Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
11. November 2019

Mathematik für Physiker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 5

Aufgabe 17: Partielle Differenzierbarkeit

Sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass g in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, wobei die partiellen Ableitungen nach x und y nicht vertauschen.

(b) Untersuchen Sie $\partial_x \partial_y g$ auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

(c) Sei f wie in Aufgabe 9 (a) auf Blatt 3. Zeigen Sie, dass f überall partiell differenzierbar ist, obwohl f nicht stetig ist.

Zusatz: Plotten Sie die Funktionen mithilfe eines geeigneten Programms oder einer geeigneten Website (z.B. Geogebra 3D Grafikrechner) und vollziehen Sie Ihre Ergebnisse an den Graphen jeweils nach.

Aufgabe 18: Greensche Funktionen

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \log \sqrt{x^2+y^2}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $n > 2$ gegeben durch $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\alpha}$. Bestimmen Sie α so, dass

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0.$$

Bemerkung: Die Lösung der Gleichung $\Delta f = \delta$ im $\mathbb{R}^n$ heißt Greensche Funktion des Laplaceoperators im $\mathbb{R}^n$. Hier ist δ die Delta-Distribution am Ursprung und $\Delta f = \delta$ bedeutet, dass $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \Delta f(x)\,\mathrm{d}x^n = g(0)$ für alle glatten Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Es ist in der Aufgabe allerdings nur zu zeigen, dass f die Gleichung $\Delta f = 0$ außerhalb des Ursprungs erfüllt.

Aufgabe 19: Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$

Skizzieren Sie die Vektorfelder

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = (2x, -y)$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x,y) \mapsto g(x,y) = (-y, x)\,,$$

indem Sie jeweils an hinreichend vielen Punkten (x,y) im $\mathbb{R}^2$ den Vektor $f(x,y)$ bzw. $g(x,y)$ einzeichnen.

Berechnen Sie in beiden Fällen sowohl die Divergenz als auch die Rotation des Vektorfeldes. Für eine partiell differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto h(x,y) = (h_1(x,y), h_2(x,y))$ ist $\operatorname{rot} h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\operatorname{rot} h(x,y) := \partial_1 h_2(x,y) - \partial_2 h_1(x,y)$.

Zusatz: Plotten Sie die auch hier die Vektorfelder mithilfe eines geeigneten Programms oder einer geeigneten Website (z.B. Geogebra “Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$) **nachdem** Sie sie zuvor von Hand skizziert haben.

Aufgabe 20: Identitäten für Gradient, Rotation und Divergenz

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) Für $f \in C^2(G)$ gilt: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0.$

(b) Für $g \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$ gilt: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} g) = 0.$

(c) Für $g \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$ gilt: $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} g) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} g) - \Delta g.$

Hinweis: Satz von Schwarz.

Abgabe: Bis Montag 18.11. um 18.00 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.