Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
18. November 2019

Mathematik für Physiker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 6

Aufgabe 21: Eine total aber nicht stetig partiell differenzierbare Funktion

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ total differenzierbar ist, die partiellen Ableitungen dort aber nicht stetig sind.

Aufgabe 22: Laplace für radiale Funktionen und eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Sei $h \in C^2((0,\infty),\mathbb{R})$ und $r : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $r(x) = \|x\|$. Es ist

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\,, \quad f := h \circ r$$

also eine rotationssymmetrische Funktion.
Zeigen Sie, dass f zweimal stetig partiell differenzierbar ist und $\Delta f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch ist, genauer, dass $\Delta f = g \circ r$ für

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad g(r) = h''(r) + \frac{n-1}{r} h'(r)\,.$$

Zeigen Sie dann, dass die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad (x,t) \mapsto u(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}}{t^{\frac{n}{2}}}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, d.h.

$$\partial_t u = \Delta_x u$$

erfüllt, wobei $\Delta_x u := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u$.

Aufgabe 23: Stetigkeit linearer Abbildungen

Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $A : V \to W$ zwischen normierten Räumen die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) A ist stetig bei $v = 0$.

(ii) A ist stetig.

(iii) A ist beschränkt.

Hinweis: Zeigen Sie (i)⇒(ii), (ii)⇒(iii) und (iii)⇒(i). Für (ii)⇒(iii) zeigen Sie die Kontraposition. Die anderen beiden Implikationen sind sehr leicht einzusehen.

Aufgabe 24: Differential einer Abbildung

Wir fassen die Menge $V := \{\, p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n als $n+1$-dimensionalen reellen Vektorraum auf. (z.B. bilden die Monome $p_j(x) = x^j$, $j = 0, \dots, n$, eine Basis von V.) Geben Sie eine Norm auf V an. Sei

$$f : V \to \mathbb{R}\,, \quad p \mapsto f(p) := \int_0^1 p(x)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie, dass f total differenzierbar ist und bestimmen Sie das Differential $Df|_p$ für alle $p \in V$. (geben Sie also insbesondere an, wie die lineare Abbildung $Df|_p : V \to \mathbb{R}$, $h \mapsto Df|_p h$ wirkt.)

Sei nun $n = 2$ und $\Phi : V \to \mathbb{R}^3$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$, der Basisisomorphismus bzgl. der oben genannten Basis aus Monomen. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $D(f \circ \Phi^{-1})|_a$ der Abbildung $f \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für alle $a \in \mathbb{R}^3$.

Abgabe: Bis Montag 25.11. um 18.00 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.