Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
25. November 2019

Mathematik für Physiker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 7

Aufgabe 25: Kugelkoordinaten

Sei $G = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^3$ und sei $f : G \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi,\, r \sin\theta \sin\varphi,\, r \cos\theta) =: (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)).$$

Machen Sie sich die geometrische Bedeutung von f klar, indem Sie das Bild der Menge $\{1\} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$ unter f skizzieren und bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f.

Aufgabe 26: Der Gradient steht senkrecht auf den Niveauflächen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in G$ und $f(x) = c$. Die Niveaufläche von f zum Wert c ist definiert durch

$$N_f(c) := \{y \in G \mid f(y) = c\}.$$

Sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N_f(c)$ mit $\varepsilon > 0$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x$. Zeigen Sie, dass

$$\langle \alpha'(0), \operatorname{grad} f(x) \rangle = 0,$$

also, dass der Gradient senkrecht auf der Niveaufläche steht. *Hinweis:* Kettenregel!

Aufgabe 27: Laplace in Polarkoordinaten

Sei $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$f(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi) =: (x(r, \varphi), y(r, \varphi))$$

und $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$(\Delta u) \circ f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \, \frac{\partial\, (u \circ f)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\, (u \circ f)}{\partial\, \varphi^2}.$$

Aufgabe 28: Kurvenintegrale und Gradientenfelder

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v \in C(G, \mathbb{R}^n)$ ein stetiges Vektorfeld. Sei weiterhin $\gamma \in C^1([a, b], G)$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann definiert man das **Kurvenintegral** von v entlang γ durch

$$\int_\gamma v := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \, \mathrm{d}t\,.$$

Zeigen Sie: Falls v ein Gradientenfeld ist, d.h. es existiert eine Funktion $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ mit $v = \nabla f$, so gilt für alle $\gamma \in C^1([a, b], G)$

$$\int_\gamma v = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,.$$

Hinweis: Der Integrand im Kurvenintegral hat für Gradientenfelder die gleiche Form wie der Ausdruck in Aufgabe 26. Sie können ihn also als Ableitung einer Funktion schreiben und dann den Hauptsatz aus Analysis 1 anwenden.

Aufgabe 29: Produktregel

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar und

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \quad x \mapsto h(x) = f(x)v(x)$$

sowie

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \quad x \mapsto g(x) = v(x) \times w(x) \,.$$

Drücken Sie $Dh|_x y$ und $Dg|_x y$ jeweils durch Df, Dv und Dw aus.

Seien nun $f(x) = \|x\|^2$, $v(x) = x$ und $w(x) = (-x_2, x_1, x_3)$. Berechnen Sie explizit die Jacobi-Matrizen $Dh|_x$ und $Dg|_x$.

Aufgabe 30: Divergenz in Kugelkoordinaten*

Wir betrachten Kugelkoordinaten wie in Aufagbe 25.

(a) Bestimmen Sie analog zum Einschub im Skript die Divergenz in Kugelkoordinaten, d.h. schreiben Sie für ein beliebiges stetig differenzierbares Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

die Abbildung $(\operatorname{div} v) \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ als Funktion der partiellen Ableitung von $v \circ f$.

(b) Bestimmen Sie nun die Matrix für den Basiswechsel auf die den Koordinaten angepasste Basis $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$, welche durch Normierung der Basis $(\operatorname{grad} r, \operatorname{grad} \theta, \operatorname{grad} \varphi)$ entsteht.

(c) Stellen Sie schließlich das Vektorfeld $v \circ f$ bezüglich der durch die Kugelkoordinaten definierten Basis $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$ dar, also in der Form

$$(v \circ f) = (v \circ f)_r \, e_r + (v \circ f)_\theta \, e_\theta + (v \circ f)_\varphi \, e_\varphi$$

und schreiben Sie $(\operatorname{div} v) \circ f$ als Funktion der partiellen Ableitung von $(v \circ f)_r$, $(v \circ f)_\theta$ und $(v \circ f)_\varphi$.

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben zählen nicht zum Aufgabenpool aus dem 50% erreicht werden müssen.

Abgabe: Bis Montag 02.12. um 18.00 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.