Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
2. Dezember 2019

Mathematik für Physiker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 8

Aufgabe 31: Taylorpolynome

Bestimmen Sie die Taylorpolynome der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung um den jeweils angegebenen Punkt:

(a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2+y}$ um den Punkt $(0,0)$.

(b) $g(x,y) = 4x^2 \log(1+x+y) - y^2$ um $(0,0)$.

(c) $h(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ um $(1,1)$.

(d) $k(x,y,z) = x^2 + 4xy - 3y^2 + y + 2xz + 3z - 4$ um $(1,3,-1)$.

Aufgabe 32: Lokale Extrema

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (4x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-x^2-4y^2}.$$

Aufgabe 33: Schwerpunkt

Im $\mathbb{R}^n$ seien k Punkte $a_1, \ldots, a_k$ gegeben und $\|\cdot\|$ bezeichne die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Summe der Abstandsquadrate $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \|x - a_j\|^2 \,,$$

im "Schwerpunkt" $\xi := \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j$ ein eindeutiges globales Minimum besitzt.

Aufgabe 34: Rechnen ohne Taschenrechner

Berechnen Sie nur mit Stift und Papier näherungsweise $1{,}05^{1{,}02}$ mit einem Fehler kleiner 10^{-4}.

Hinweis: Entwickeln Sie die Funktion $f(x,y) = x^y$ um den Punkt $(1,1)$ bis zu einer hinreichend hohen Ordnung.

Aufgabe 35: Taylorreihe

Bestimmen Sie bis hin zu beliebiger Ordnung n das Taylorpolynom $P^{(k)}_{f,(0,0)}$ für $f : (-1,1)^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

Für welche Werte von (x,y) konvergiert die Taylorreihe, gilt also $\lim_{k\to\infty} P^{(k)}_{f,(0,0)}(x,y) = f(x,y)$?

Abgabe: Bis Montag 09.12. um 18.00 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.