Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/20
9. Dezember 2019

Mathematik für Physiker 3 / Analysis 2

Übungsblatt 9

Aufgabe 36: Lokales Auflösen und der Satz über implizite Funktionen

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y) = y^3 + y - x^4 + x^2$. Zeigen Sie, dass offene Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von 0 und eine eindeutige Abbildung $g : U \to V$ existieren, so dass $F(x, g(x)) = 0$.
Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P^{(2)}_{g,0}$ zweiter Ordnung von g in 0.

Visualisierung: Plotten Sie den Graphen der Funktion F zusammen mit der Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 0$ um die Nullstellemenge von F zu visualisieren (z.B. im Geogebra 3d Graphikrechner).

Plotten Sie dann g selbst beispielsweise bei WolframAlpha mit dem Befehl
`implicitplot y^3+y-x^4+x^2=0 and y = "`$P^{(2)}_{g,0}$`"(x)`
wobei Sie natürlich für "$P^{(2)}_{g,0}$" das von Ihnen gefundene Taylorpolynom einsetzen.

Aufgabe 37: Lokale und globale Invertierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine Umgebung U besitzt, so dass $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Man sagt, dass f lokal glatt invertierbar ist. Ist f global glatt invertierbar, also $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Diffeomorphismus?

Aufgabe 38: Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - y^3$ unter der Nebenbedingung $h(x, y) = 0$ mit $h(x, y) = x^2 + 2y^2 - 9$.

Aufgabe 39: Extrema unter Nebenbedingungen

Man bestimme den achsenparallelen Quader größten Volumens, der dem Ellipsoid

$$E_{a,b,c} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

einbeschrieben ist. Fertigen Sie zur Orientierung zunächst eine Skizze der Situation in zwei Dimensionen an.

Aufgabe 40: Maximale Entropie bei fester Energie: die kanonische Verteilung

Physikalischer Kontext: Ein physikalisches System erlaube N verschiedene Zustände, wobei der j-te Zustand Energie $E_j \in \mathbb{R}$ habe und $E_1 < E_2 < \ldots < E_N$ gelte. Ein statistischer Zustand p des Systems ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Raum der Zustände, d.h. ein Punkt $p \in [0,1]^N$ mit $\sum_{j=1}^N p_j = 1$. Hier ist p_j die Wahrscheinlichkeit, dass der j-te Zustand realisiert ist. Die Entropie einer solchen Verteilung ist durch die Funktion

$$S : [0,1]^N \to \mathbb{R}, \quad S(p) = -\sum_{j=1}^N p_j \ln(p_j)$$

definiert. Wir möchten diejenige Wahrscheinlichkeitsverteilung p, finden, welche die Entropie bei gegebener Gesamtenergie U mit $E_1 < U \leq \langle E \rangle$ maximiert, wobei $\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E_j$ ist.

Mathematische Problemstellung: Die mathematische Aufgabenstellung lautet also, zu gegebenen Werten $E_j \in \mathbb{R}$ mit $E_1 < E_2 < \ldots < E_N$ und $U \in (E_1, \langle E \rangle]$ das Maximum der Funktion S unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^N p_j E_j - U = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^N p_j - 1 = 0$$

zu finden.

Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(a) Nennen Sie den Lagrangemultiplikator für die erste Nebenbedingung $-\beta$ und für die zweite $1 - \lambda$. Zeigen Sie, dass für jedes Maximum $p \in [0,1]^N$ von S unter den obigen Nebenbedingungen $p_j = \frac{1}{Z(\beta)} \mathrm{e}^{-\beta E_j}$ gilt, wobei $Z(\beta) = \sum_{j=1}^N \mathrm{e}^{-\beta E_j}$ die Zustandssumme bezeichnet und $U(\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z(\beta))$ ist.

(b) $*$ Machen Sie sich klar, dass die Abbildung $U : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\beta \mapsto U(\beta)$ streng monoton fallend ist und somit auf ihrem Bild invertierbar ist. Zeigen Sie dann, dass das Bild genau das Intervall $(E_1, \langle E \rangle]$ ist. Überlegen Sie sich dazu auch, wie $p(\beta)$ für $\beta = 0$ und $\beta \to \infty$ aussieht. Physikalisch spielt $\beta > 0$ die Rolle der inversen Temperatur, d.h. $\beta = T^{-1}$.

    (Sie können die folgenden Teilaufgaben auch bearbeiten, wenn Sie Teil (b) nicht selbst zeigen können)

(c) Mit Teil (a) und (b) haben wir nun zu jeder Energie $U \in (E_1, \langle E \rangle]$ einen eindeutigen Kandidaten $p(\beta)$, nämlich $p_j(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \mathrm{e}^{-\beta E_j}$ mit $\beta = \beta(U)$, gefunden. Zeigen Sie, dass für jedes $\beta \geq 0$ diese Verteilung $p(\beta)$ ein lokales Maximum von S unter den obigen Nebenbedingungen ist.

(d) Begründen Sie, warum es sich bei der kanonischen Verteilung $p(\beta)$ tatsächlich um das eindeutige globale Maximum von S unter den obigen Nebenbedingungen handelt.

(e) Betrachten Sie nun den Spezialfall $E_j = j$, was einem quantenmechanischen harmonischen Oszillator entspricht. Berechnen Sie für diesen Fall die Zustandssumme $Z(\beta)$ und die Funktion $U(\beta)$ explizit. Wie lautet der Zusammenhang zwischen U und β im Grenzfall $N \to \infty$?

Mit $*$ gekennzeichnete Teilaufgaben zählen nicht zum Aufgabenpool aus dem 50% erreicht werden müssen.

Abgabe: Bis Montag 16.12. um 18.00 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.