Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2019/2020
15. Januar 2020

Mathematik für Physiker 3 / Analysis 2

Wiederholungsaufgaben

Diese Aufgaben sind zur Bearbeitung in Eigenregie gedacht. Sie werden nicht korrigiert. Dies ist KEINE Beispielklausur und in der Klausur bzw. im Test werden auch Aufgaben vorkommen, die argumentative Fähigkeiten sowie Wissen abprüfen. Auch wird es in der Klausur/ im Test nur wenige Ankreuzaufgaben bzw. Wahr/Falsch-Fragen geben. Trotzdem ist es nützlich über die entsprechenden Fragen nachzudenken, da sie Verständnis prüfen bzw. ihre Bearbeitung Ihr Verständnis verbessern kann.

1 Einfachere Aufgabe wie sie ähnlich auch in der Klausur vorkommen können

Aufgabe 1: Stetige Funktionen

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subset X$ kompakt. Welche der folgenden Aussagen sind dann korrekt?

- ☐ f ist beschränkt.
- ☐ Die Funktion $f|_K \colon K \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum an.
- ☐ Die Funktion $f|_K \colon K \to \mathbb{R}$ hat genau ein Maximum und genau ein Minimum.
- ☐ Die Funktion $f|_K \colon K \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Aufgabe 2: Kompakte Mengen

Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

- ☐ $\mathbb{R}$.
- ☐ $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
- ☐ $(0, 1) \subset \mathbb{R}$.
- ☐ $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: Inneres, Abschluss, Rand

Sei $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der euklidischen Metrik und $M = (0, 1) \cup \left\{-\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$. Geben Sie $\overline{M}$, $\mathring{M}$ und ∂M (also den Abschluß, das Innere und den Rand von M) an. Ist M kompakt, offen und/oder abgeschlossen? Können Sie Ihre Antworten auch präzise begründen?

Bemerkung: *Wenn Sie etwas "angeben" sollen, zählt nur das richtige Ergebnis; ein Lösungsweg oder eine Begründung sind dann nicht gefragt.*

Aufgabe 4: Stetigkeit

Formulieren Sie eine Definition von Stetigkeit. Sie können dabei den Kontext selbst festlegen (z.B. Funktionen zwischen topologischen oder metrischen Räumen), müssen diesen aber klar benennen.

Bemerkung: *Wenn Sie eine Aussage oder eine Definition "formulieren" sollen, dann kommt es auf eine korrekte, präzise und vollständige Formulierung an. Es ist aber unerheblich, ob die Formulierung wörtlich dieselbe wie im Skript ist.*

Im vorliegenden Beispiel wäre eine vollständige und korrekte Antwort beispielsweise

Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X und Y heißt stetig im Punkt $x \in X$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ gilt. f heißt stetig, wenn f in allen Punkten stetig ist.

Aufgabe 5: Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar am Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind dann korrekt?

☐ f ist stetig bei x_0.

☐ f ist partiell differenzierbar bei x_0.

☐ f ist total differenzierbar bei x_0.

☐ f ist beliebig oft differenzierbar bei x_0.

Aufgabe 6: Ableitungen

Seien

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y) = \exp(xy)$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad g(x, y) = (\sin(x), \cos(y))\,.$$

Berechnen Sie grad$f$, Hess$f$, Δf, Dg und div$g$ (also den Gradienten, die Hessesche und den Laplace von f sowie die Ableitung und die Divergenz von g). Ist Hess$f$ positiv definit?

Aufgabe 7: Differenzierbarkeit

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $x = 0$ und

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad x \mapsto f(x) = g(\|x\|)\, x\,,$$

wobei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Zeigen Sie, dass f im Punkt $x = 0$ total differenzierbar ist.

Bemerkung: *Wenn Sie etwas zeigen sollen, dann ist ein formaler Beweis gefragt ist. Es müssen sowohl die Gesamtstruktur als auch die einzelnen Schritte des Beweises klar nachvollziehbar und korrekt sein. Sie dürfen dabei (falls nicht anders angegeben) die in der Vorlesung bewiesenen Aussagen verwenden. In der konkreten Aufgabe muss gezeigt werden, dass die Funktion die Definition von totaler Diffbarkeit erfüllt.*

Aufgabe 8: Taylorpolynom

Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad zwei der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^4$$

am Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$.
Beachten Sie: Das Taylorpolynom ist ein Polynom in den Variablen $x - x_0$ und $y - y_0$.

Bemerkung: *"Bestimmen" meint, dass Ihr Lösungsweg einschließlich aller Rechnungen und Argumente nachvollziehbar sein muss, allerdings kein formaler Beweis gefragt ist.*

Aufgabe 9: Extrema 1

Seien
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$
und
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y) = \exp(x^2 - y^2)\,.$$
Bestimmen Sie Art und Lage der globalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $h = 0$.

Aufgabe 10: Extrema 2

Sei $\overline{B_1(0)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ und
$$f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y) = x^2y^2\,.$$
Bestimmen Sie Art und Lage der globalen Extrema von f.

Aufgabe 11: Differentialgleichungen

Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $\dot\gamma(t) = v(\gamma(t))$ mit $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \|x\|^2x$ sind korrekt?

- ☐ Es handelt sich um eine Differentialgleichung erster Ordnung.
- ☐ Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung.
- ☐ Das Vektorfeld v ist lokal Lipschitzstetig.
- ☐ Die Lösungen der Gleichung existieren für alle Zeiten, also $I(x_0) = \mathbb{R}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 12: Lineare Differentialgleichung 1

Sei $a > 0$. Geben Sie die Lösung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der linearen Differentialgleichung
$$\dot\gamma(t) = a\,\gamma(t)$$
zum Anfangswert $\gamma(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ an. Bestimmen Sie dann die Lösung der inhomogenen Gleichung
$$\dot\gamma(t) = a\,\gamma(t) + 1$$
zum Anfangswert $x_0 = 0$.

Aufgabe 13: Lineare Differentialgleichung 2

Für $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \gamma(t)$, betrachte die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung
$$(*) \qquad \ddot\gamma(t) + \dot\gamma(t) + \gamma(t) + 1 = 0\,.$$
Finden Sie eine Matrix $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ so, dass das System erster Ordnung
$$(**) \qquad \dot\alpha(t) = A\,\alpha(t) + b$$
für $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, äquivalent zu $(*)$ ist. Geben Sie weiterhin an, wie die Anfangsdaten für $(**)$ aus den Anfangsdaten für $(*)$ hervorgehen und wie man aus einer Lösung von $(**)$ wieder eine Lösung von $(*)$ erhält.

Aufgabe 14: Lineare Differentialgleichung 3

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dddot{\gamma} + \ddot{\gamma} - \dot{\gamma} - \gamma = 0$$

an.

Aufgabe 15: Anfangswertprobleme

Finden Sie jeweils die maximale Lösung zu folgenden Anfangswertproblemen:

(a) $\dot{\gamma}(t) = 3 + t - \gamma(t)$ mit $\gamma(1) = 1$.

(b) $\dot{\gamma}(t) + \frac{t}{\gamma(t)} = 0$ mit $\gamma(0) = 1$.

Hinweis: Hier ist ein Teil der Problemstellung, sich zunächst das geeignete Lösungsverfahren zu überlegen.

2 Wahr/falsch-Fragen

Bei diesen Aufgaben sollten Sie sich jeweils auch fragen, wie Sie ihre Antwort beweisen würden bzw. welchen Satz aus der Vorlesung Sie verwenden könnten.
Zur Erinnerung: Um eine Aussage als falsch zu erkennen, reicht die Angabe eines Gegenbeispiels.

Aufgabe 1. Seien $f, f_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Ist jedes f_n gleichmäßig stetig und konvergieren die f_n punktweise gegen f, dann ist f stetig. . . . . w: ☐ f: ☐

(b) Ist jedes f_n differenzierbar und konvergieren die f_n gleichmäßig gegen f, dann ist f stetig. . . . . w: ☐ f: ☐

(c) Ist jedes f_n differenzierbar und konvergieren die f_n gleichmäßig gegen f, dann ist f differenzierbar. . . . . w: ☐ f: ☐

Aufgabe 2. Sei

$$M_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 < y^2 + z^2\} \qquad M_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \geq y^2 + z^2\}$$

(a) M_1 und M_2 sind offen . . . . w: ☐ f: ☐

(b) M_2 ist abgeschlossen . . . . w: ☐ f: ☐

(c) M_2 ist kompakt . . . . w: ☐ f: ☐

(d) M_1 ist zusammenhängend. . . . . w: ☐ f: ☐

Aufgabe 3. Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen X und Y.

(a) Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y. .... w: ☐ f: ☐

(b) Das Bild $f(K)$ jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq X$ ist abgeschlossen. .... w: ☐ f: ☐

(c) Das Bild $f(U)$ jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ ist offen. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit Komponentenfunktionen f_j, $j = 1, \dots, m$.

(a) Ist f in $x \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar, so ist f in x stetig. .... w: ☐ f: ☐

(b) Falls alle $\partial_i f_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ überall existieren, so ist f überall total differenzierbar. .... w: ☐ f: ☐

(c) f ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn alle f_j, $j = 1, \dots, m$ in x differenzierbar sind. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 5. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) := y \exp(x^2 + z^2)$

(a) f besitzt keine lokalen Extrema .... w: ☐ f: ☐

(b) $f^{-1}(0)$ ist ein 2-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$ .... w: ☐ f: ☐

(c) f hat ein globales Maximum. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 6. Sei X ein metrischer Raum, V ein normierter Raum.

(a) In X konvergiert jede Cauchy-Folge. .... w: ☐ f: ☐

(b) Ist X kompakt, so konvergiert jede Folge in X. .... w: ☐ f: ☐

(c) In X ist jede abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt. .... w: ☐ f: ☐

(d) Ist X kompakt, so ist jede abgeschlossene Teilmenge von X ebenfalls kompakt. w: ☐ f: ☐

(e) Jede Norm auf V induziert eine Metrik auf V. .... w: ☐ f: ☐

(f) Jede Metrik auf V induziert eine Norm auf V. .... w: ☐ f: ☐

(g) In X ist das Komplement jeder abgeschlossenen Menge offen. .... w: ☐ f: ☐

(h) In X ist jede nicht-offene Menge abgeschlossen. .... w: ☐ f: ☐

(i) In X gibt es eine Menge, die offen und abgeschlossen ist. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 7. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2$.

(a) f ist stetig differenzierbar abseits der 0 und $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. .... w: ☐ f: ☐

(b) ∇f ist stetig differenzierbar abseits der 0 und $\Delta f(x) = \frac{n}{\|x\|_2}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 8. Sei $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$.

(a) g ist stetig differenzierbar und es gilt $\operatorname{div} g(x) = n$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. .... w: ☐ f: ☐

(b) g ist stetig differenzierbar und es gilt $\operatorname{rot} g(x) = \frac{1}{n}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 9. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\tilde{f} : \overline{G} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ die Einschränkung von f auf $\overline{G}$.

(a) $\tilde{f}$ besitzt ein globales Maximum. .... w: ☐ f: ☐

(b) f besitzt ein globales Maximum. .... w: ☐ f: ☐

(c) An jedem lokalen Maximum $x \in \overline{G}$ von $\tilde{f}$ gilt $\nabla f(x) = 0$. .... w: ☐ f: ☐

(d) Für ein $x \in G$ gelte, dass

$$\langle y, \operatorname{Hess} f(x) y\rangle > 0 \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,.$$

Dann hat f bei x ein lokales Minimum. .... w: ☐ f: ☐

(e) Ist $x \in G$ ein striktes lokales Minimum von f, so gibt es keinen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle a, \operatorname{Hess} f(x) a\rangle < 0$. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 10. Sei $V = C([0,1])$.

(a) Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf V, so ist auch $\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$ eine Norm auf V. .... w: ☐ f: ☐

(b) Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so definiert $d(f,g) := \|f-g\|$ eine Metrik auf V. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 11. Sei X ein metrischer Raum und $f\colon X \longrightarrow X$ stetig.

(a) Ist $A \subseteq X$ offen, so ist $f^{-1}(A)$ offen. .... w: ☐ f: ☐

(b) Ist $A \subseteq X$ offen, so ist $f(A)$ offen. .... w: ☐ f: ☐

(c) $f \circ f$ ist stetig. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 12. Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) f ist stetig. .... w: ☐ f: ☐

(b) $f \circ g$ ist total differenzierbar und es gilt $D(f\circ g)|_{x_0} = Df|_{x_0} \cdot Dg|_{x_0}$. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 13. Hieraus *folgt* die Stetigkeit von $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

(a) $\forall \varepsilon \geq 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$ .... w: ☐ f: ☐

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ .... w: ☐ f: ☐

(c) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ .... w: ☐ f: ☐

(d) für alle konvergenten Folgen $x_n \to x_0$ hat $(f(x_n))_n$ eine konvergente Teilfolge. .... w: ☐ f: ☐

Aufgabe 14. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix.

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto Ax$ ist beschränkt. .... w: ☐ f: ☐

(b) Es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sodass eine Lösung zum Anfangswertproblem (AWP) $\dot\gamma = A\gamma$, $\gamma(0) = x_0$ nicht für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert. .... w: ☐ f: ☐

(c) Zerfällt das charakteristische Polynom in verschiedene Linearfaktoren der Form $(x - \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, n$, so lässt sich die allgemeine Lösung des AWP $\dot\gamma = A\gamma$, $\gamma(0) = x_0 := (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)})$ explizit zu

$$\gamma(t) := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i t} x_0^{(i)} e_i, \qquad t \in \mathbb{R}$$

angeben, wobei $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Standardbasis ist. .... w: ☐ f: ☐

(d) Das AWP $\dot\gamma = \sqrt{|\gamma|}$, $\gamma(0) = 1$ hat eine Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. .... w: ☐ f: ☐

(e) Das AWP $\dot\gamma = \sqrt{1 + |\gamma|}$, $\gamma(0) = -1$ hat eine eindeutige maximale Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. .... w: ☐ f: ☐