Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 19/20

Mathematik I für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 4 (Abgabe am 08.11.2019)

Aufgabe 19 (12 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x^3-2x^4+x}{x^4-5x}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{9x^3-2x^4+x}{x^4-5x}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{9x^4-2x^4+x}{x^4-5x}$ d) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{|x-9|}$

Aufgabe 20 (keine Abgabe)
Zeigen sie mithilfe der Definition des Grenzwertes, dass

$$\lim_{x\to 3}\big(x^2-x\big)=6\,, \quad \text{d.h. finden Sie ein geeignetes } \delta(\varepsilon).$$

Aufgabe 21 (3+3+4 = 10 Punkte)
Wo sind die folgenden Funktionen stetig, stetig fortsetzbar (und wie?) bzw. unstetig?

a) $f(x)=\dfrac{7x^3-2x^4+x}{x^4-5x}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-x-20}{x+4}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$

Aufgabe 22 (10 Punkte)
Berechnen Sie für $n\in\mathbb{N}_0$ (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\mu}\frac{9^\nu}{n-\nu+1}$ b) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n}\frac{\mu}{\nu(\nu+1)}$

Hinweis: Kennzeichnen Sie in der $\mu\nu$-Ebene jeweils alle Paare (μ,ν), über die in $\sum\limits_{\nu=0}^{n}\sum\limits_{\mu=\nu}^{n}\dots$ bzw. in $\sum\limits_{\mu=0}^{n}\sum\limits_{\nu=0}^{\mu}\dots$ summiert wird. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 23 (100 Zusatzpunkte)
Sinnvolle *Skills* auf KhanAcademy sind diese Woche z.B.

- *Infinite limits: graphical*,
- *Limits by factoring* und
- *Limits using conjugates*.

Hinweise: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

Aufgabe 24 (keine Abgabe)

Nächsten Mittwoch werden wir über Ableitungen reden. Dabei werden wir eine alternative Definition der Ableitung kennen lernen (nicht mit Differentialquotient sondern mit Klein-o). Wiederholen Sie im Vorfeld, was Sie bereits über Ableitungen gelernt haben. Die folgende Checkliste hilft.

a) Ich kenne die Definition der Ableitung als Differentialquotient (Formel) und die Interpretation als Tangentensteigung (Skizze).
   (i) Videosequenzen[1] (3:26 min & 5:31 min) / Skript S.22
   00:07:37 – 00:11:03 (Differentialquotient)
   `https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171108_002_mathnat1_0001?t=457.00`
   00:12:16 – 00:17:47 (Tangentensteigung)
   `https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171108_002_mathnat1_0001?t=736.00`
   (ii) Hübsche Animation:
   `https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Tangent_function_animation.gif`
   (iii) *Skills* auf `www.khanacademy.org`:
   Derivative as slope of curve
   Differentiability at a point: graphical
   Visualizing derivatives
   (iv) Ich kann mithilfe des Differentialquotienten die Ableitungen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ bestimmen.

b) Ich kenne verschiedene Schreibweisen für Ableitungen:
   $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$, $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, $\ldots$
   (i) Videosequenz (1:23 min) / Skript S.22/23
   00:09:43 – 00:11:05
   `https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171108_002_mathnat1_0001?t=583.00`

c) Ich kenne die Ableitung von Potenzen: $f(x) = x^n$, $f'(x) = ?$
   (i) Videosequenz (7:27 min) / Skript S.23
   00:22:56 – 00:30:23
   `https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171108_002_mathnat1_0001?t=1376.00`

d) Ich kenne Ableitungsregeln für Summen, Produkte und Verkettungen:
   (i) Videosequenz (3:53 min) / Skript S.24
   00:43:02 – 00:46:55
   `https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171108_002_mathnat1_0001?t=2582.00`
   (ii) Seien f und g differenzierbar, was ist $(f+g)'$, $(fg)'$ und $(f \circ g)'(x)$?
   (iii) Ich kann die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

   mithilfe von Produkt- und Kettenregel herleiten.

[1] Die Links führen zu den richtigen Startzeitpunkten innerhalb der Videos. Die meisten Videos sind aber länger als die angegebene Endzeit.